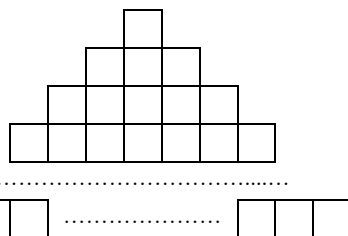


## Просто порешаем задачи

---

**1.1.** Найдите наименьшее натуральное число: **а)** кратное 10, сумма цифр которого равна 10; **б)** кратное 100, сумма цифр которого равна 100; **в)** кратное 5, сумма цифр которого равна 25.

**1.2.** На клетчатой бумаге нарисована фигура (см. рис.): в верхнем ряду — одна клеточка, во втором сверху — три клеточки, в следующем ряду — 5 клеточек, и так далее. Сколько всего в этой фигуре клеточек, если в ней:



**а)** 5 рядов; **б)** 9 рядов; **в)** 2020 рядов?

**1.3.** Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы полученная ломаная прошла через 16 точек, расположенных в узлах квадратной сетки  $4 \times 4$ ?

**1.4.** Каждый из трёх рубильников включает три из семи лампочек. Лампочка загорается, если включён хотя бы один включающий её рубильник. Если включить первый и второй, то загорятся лампочки с номерами 1, 2, 4 и 5. Если включить второй и третий, то загорятся все лампочки, кроме 2-й. А сколько лампочек загорится, если включить первый и третий рубильники?

**1.5.** В лотерее 39 шаров, пронумерованных числами от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает шесть номеров. В розыгрыше лотереи номера шести шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них гарантированно нашлась выигравшая?

---

## Разрежьте квадрат

---

- 2.1.** Разрежьте квадрат на: **а)** 4; **б)** 8; **в)** 11 равных по форме и по площади частей.
- 2.2.** Разрежьте квадрат на: **а)** 6; **б)** 7; **в)** 8 квадратов.
- 2.3.** Разрежьте квадрат на 20 одинаковых треугольников.
- 2.4.** Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы никакие два прямоугольника не имели целой общей стороны.
- 2.5.** Разрежьте квадрат со стороной 4 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25 см.
- 2.6.** Разрежьте квадрат  $11 \times 11$  по сторонам клеток на 11 квадратов.
- 2.7.** Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно равных), большее пяти.
- 2.8.** Разрежьте квадрат: **а)** на два равных пятиугольника; **б)** на несколько выпуклых пятиугольников.
- 2.9.** Изобразите на клетчатой бумаге квадрат с вершинами в узлах сетки площадью: **а)** 5; **б)** 8; **в)** 10; **г)** 13 клеток.
-

## Чётные и нечётные

---

**3.1. а)** Перемножили несколько целых чисел, среди которых есть чётные. Чётным или нечётным будет их произведение?

**б)** Перемножили несколько нечётных чисел. Чётным или нечётным будет их произведение? **в)** Сложили несколько нечётных чисел. Чётной или нечётной будет их сумма?

**3.2.** Лера нарисовала на доске семь котиков. Потом в аудиторию пришли 33 школьника с Малого мехмата. Каждый из них или стёр одного котика, или дорисовал нового. Могло ли в конце остаться три котика?

**3.3.** Может ли сумма трёх целых чисел быть чётной, а произведение тех же трёх целых чисел — нечётным?

**3.4.** Можно ли разменять 100 фертингов монетами по 1, 3, 5 и 25 фертингов так, чтобы всего оказалось 33 монеты?

**3.5.** На окружности отметили 2021 точку, каждая из которых покрашена в один из двух цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, стоящие рядом.

**3.6.** На доске написано 1010 плюсов и 1011 минусов. За один ход разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс (если они одинаковы) или минус (если они различны). Какой знак останется на доске через 2020 ходов?

**3.7.** В каждой клетке таблицы  $2021 \times 2021$  написано целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждой строке нечётна. Докажите, что сумма чисел в каком-то столбце таблицы также нечётна.

**3.8.** Можно ли целые числа от 1 до 2021 включительно разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе самое большое число равнялось сумме всех остальных чисел?

**3.9.** Гриша написал на доске 50 целых чисел. Яша заметил, что сумма любых 49 из них нечётна. Чётна или нет сумма всех чисел?

**3.10.** Книга состоит из 10 рассказов объёмом 1, 2, 3, ..., 10 страниц соответственно. Первый рассказ начинается на первой странице книги, каждый следующий рассказ начинается с новой страницы (но неизвестно, в каком порядке идут рассказы). Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечётной страницы?

---

## Последняя цифра

---

**4.1.** Найдите последнюю цифру числа: **а)**  $2^{100}$ ; **б)**  $549^{49}$ ; **в)**  $2021^{2021}$ .

**4.2.** В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно  $23021^{337} - 1$ . Не опечатка ли это? (*Простое число* — это натуральное число, имеющее ровно два натуральных делителя.)

**4.3.** Найдите последнюю цифру в произведении:

- а)** всех простых чисел, не превосходящих 100;
- б)** всех нечётных простых чисел, не превосходящих 100;
- в)** всех нечётных чисел от 1 до 2021.

**4.4.** В магазин привезли 206 литров молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов каждого вида?

**4.5.** Делится ли число  $47^{30} + 39^{50}$  на 10?

**4.6.** Сколькими нулями оканчивается число

$$2020! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020?$$

**4.7. а)** Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два числа, разность которых делится на 10.

**б)** Какое наименьшее количество натуральных чисел нужно взять наугад, чтобы сумма или разность каких-то двух из них делилась на 10?

**в)** Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.

**4.8.** На какую цифру может оканчиваться сумма нескольких первых натуральных чисел?

**4.9.** Вовочка перемножил несколько девяток. Может ли произведение тоже оканчиваться несколькими девятками?

**4.10.** Найдите последнюю цифру числа  $7^{7^7}$ . (Степени вычисляются «сверху вниз»:  $7^{7^7} = 7^{(7^7)}$ .)

**4.11.** На доске было написано число из нескольких семёрок:  $777 \dots 77$ . Влад стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию, и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.

**4.12.** Можно ли придумать пример на деление с остатком, в котором делимое, делитель, неполное частное и остаток (в каком-нибудь порядке) оканчивались цифрами 9, 7, 3 и 1?

---

## Малая Олимпиада

6–8 КЛАССЫ

24 ОКТЯБРЯ 2020 г.

1. Про натуральное число  $n$  известно, что в десятичной записи числа  $n^3$  не менее 5 цифр, а в записи  $n^8$  не более 11. Сколько цифр в записи числа  $n^{24}$ ?
2. Найдите наименьшее 9-значное число, кратное 72, в котором не встречается цифра 0 (другие цифры могут повторяться).
3. Вася вписал в таблицу  $2020 \times 2020$  натуральные числа от 1 до  $2020^2$  следующим образом: в первой строке числа от 1 до 2020, во второй — от 2021 до 4040, в третьей — от 4041 до 6060, и т.д. Далее он просуммировал числа в каждом столбце и получил 2020 новых чисел. Петя расставляет между этими 2020 числами знаки  $+$  и  $-$ . Какое самое близкое к нулю число он может получить?
4. На танцевальном вечере ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, но каждая девочка танцевала по крайней мере с одним мальчиком. Докажите, что найдутся две такие пары  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$ , что мальчик  $A_1$  танцевал с девочкой  $B_1$ , а  $A_2$  танцевал с  $B_2$ , но  $A_1$  не танцевал с  $B_2$ , а  $A_2$  с  $B_1$ .
5. Можно ли разрезать доску  $9 \times 5$  на трёхклеточные уголки?
6. На плоскости нарисованы двадцать окружностей, проходящих через одну точку. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость эти окружности?

## Двигайся и работай!

- 6.1.** Из дома Юра вышел на 5 минут позже Лены, но шёл со скоростью в два раза большей, чем она. Через какое время Юра догонит Лену?
- 6.2.** Собаки Жучка и Полкан увидели друг друга во дворе и одновременно побежали навстречу друг другу. Через 5 с, когда между ними оставалось 6 м, Жучка испугалась и встала как вкопанная, а Полкан ещё через 2 с подбежал к ней и поприветствовал. На каком расстоянии находились собаки, когда увидели друг друга, если Полкан бежит втрое быстрее Жучки?
- 6.3.** Белка вылезает из гнезда налегке, бежит к орешнику и через две минуты возвращается в гнездо с орехом. Далеко ли от орешника её гнездо, если налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом — со скоростью 3 м/с?
- 6.4.** По круговому треку длиной 500 м гоняют в одном направлении два велосипедиста, скорость первого — 21 м/с, скорость второго — 27 м/с. Стартовали они одновременно из одной точки, а финишировали через 20 мин. На каком расстоянии друг от друга находятся точки финиша? (Расстояние между точками на окружности — длина меньшей из дуг, соединяющих точки.)
- 6.5.** Бенедикт и Франциск красят забор. Каждый из них по отдельности может покрасить забор за 8 часов. Забор начал красить Бенедикт, а спустя 2 часа к нему присоединился Франциск. За сколько часов был покрашен весь забор?
- 6.6.** На птицеферме «Ряба» 8 т корма курам хватает на 20 дней. На птицеферме «Серая Шейка» такого же запаса уткам хватает на 60 дней. На сколько дней хватит 8 т этого корма всем птицам вместе, если птицефермы объединятся?
- 6.7.** Артели косцов надо было скосить два луга, один из которых вдвое больше другого. Полдня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам: первая половина осталась на лугу и докосила его к вечеру, а вторая половина косила малый луг, и на нём к вечеру остался участок, скошенный за целый следующий день одним косцом. Сколько косцов в артели?
- 6.8.** Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?
- 6.9.** Пони и ослик бегали с постоянными скоростями по кругу длиной 100 м. Пони каждые две минуты обгонял ослика. Когда ослик вдвое увеличил скорость, он сам стал каждые две минуты обгонять пони. С какими скоростями бегали пони и ослик изначально?
- 6.10.** Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Мальчик умеет бегать вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно 1 км. Есть ли смысл идти до следующей остановки, или есть риск упустить автобус?
- 6.11.** Два пловца одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый — по течению, второй — против течения. Через пять минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто из них вернулся раньше? Скорости пловцов в стоячей воде не обязательно равны.

## Геометрическое

---

**7.1.** Внутренние покои дворца султана Ибрагима ибн Саида состоят из ста одинаковых квадратных комнат, расположенных в виде квадрата  $10 \times 10$ . Если у двух комнат есть общая стена, то в ней обязательно есть ровно одна дверь. А если стена внешняя, то в ней обязательно есть ровно одно окно. Сколько окон и дверей в покоях Ибрагима ибн Саида?

**7.2.** Есть три одинаковых кирпича и линейка. Как без вычислений узнать длину главной диагонали кирпича? (Главная диагональ — та, которая соединяет две противоположные вершины кирпича. Она лежит внутри кирпича и снаружи не видна. Ломать кирпичи нельзя.)

**7.3.** Студенты кафедры высшей геометрии и топологии, находясь летом на отдыхе, разрезали арбуз на четыре части и съели. Могло ли после этого остаться пять корок?

**7.4.** Ковёр-самолёт летает только тогда, когда имеет прямоугольную форму. У Ивана-царевича был ковёр-самолёт размером  $9 \times 12$ . Как-то раз Змей Горыныч подкрался и отрезал от этого ковра маленький коврик размером  $1 \times 8$ . Иван-царевич очень расстроился и хотел было отрезать еще кусочек  $1 \times 4$ , чтобы получился прямоугольник  $8 \times 12$ . Но Василиса Премудрая предложила поступить по-другому. Она разрезала ковёр на три части, из которых волшебными нитками сшила квадратный ковёр-самолёт размером  $10 \times 10$ . Сможете ли Вы догадаться, как Василиса Премудрая переделала испорченный ковёр?

**7.5.** Можно ли в квадрате  $10 \times 10$  расставить 12 кораблей  $1 \times 4$  (для игры типа «морского боя») так, чтобы корабли не соприкасались друг с другом (даже вершинами)?

**7.6. а)** На листе бумаги нарисовали три попарно различных квадрата. Все вершины этих квадратов отметили. Могло ли оказаться, что отмечено меньше девяти точек? **б)** На листе бумаги нарисовали четыре попарно различных квадрата. Все вершины этих квадратов отметили. Могло ли оказаться, что отмечено меньше десяти точек?

**7.7.** Придумайте три фигуры, из которых можно сложить как круг, так и квадрат (фигуры могут перекрываться, но и круг, и квадрат должны быть без дыр).

**7.8.** В круге отметили точку. Разрежьте круг: **а)** на три; **б)** на две части так, чтобы из них можно было составить новый круг с отмеченной точкой в центре.

**7.9.** На бумаге нарисован квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка  $P$ . Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит точка  $P$  (если точка лежит на прямой, то он говорит, что  $P$  лежит на прямой).

**а)** Как за четыре вопроса узнать, лежит ли точка  $P$  внутри квадрата?

**б)** Удастся ли это сделать за три вопроса?

---

## Математические игры

---

### *Игры-шутки (исход игры не зависит от ходов противников: докажите!)*

**8.1.** На доске написано 10 единиц и 10 двоек. Двое играют по следующим правилам: за ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй. Кто выиграет?

**8.2.** Маша и Ваня по очереди ломают шоколадку «Алёнка» размером  $6 \times 8$ . За один ход можно сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если первый разлом делает Маша?

### *Симметричные стратегии*

**8.3.** Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с двумя гроссмейстерами, причем с одним из соперников он играл чёрными фигурами, а с другим — белыми. За этот сеанс Остап получил 1 очко. (За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.) Как он смог этого добиться?

**8.4.** а) Имеются две кучки по 10 спичек. Двое по очереди берут спички, причём за один ход разрешается брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? б) А если в одной кучке 20, а в другой 30 спичек?

**8.5.** В каждой клетке доски  $7 \times 7$  стоит шашка. Двое по очереди снимают с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Укажите выигрышную стратегию для первого игрока.

**8.6.** Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**8.7.** Петя и Вася по очереди ставят ладьи на крайние клетки доски  $9 \times 9$  так, чтобы каждая выставленная ладья оказалась под боем чётного количества ладей, начинает Петя. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

### *Другие стратегии (дополнение, удачное соответствие)*

**8.8.** а) В кучке лежит 20 карандашей. Каляка и Маляка по очереди берут карандаши из кучки. За один ход разрешается взять от 1 до 4 карандашей. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет, если начинает игру Каляка? б) А если за один ход разрешается брать от 1 до 5 карандашей?

**8.9.** Петя и Вася играют, выставляя по очереди коней на клетчатую доску  $2 \times 50$ , начинает Петя. За один ход игрок должен выставить на свободные клетки двух коней, которые бьют друг друга. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто из мальчиков может выиграть, как бы ни играл соперник?

**8.10.** Клетки доски  $1 \times 2021$  последовательно пронумерованы числами от 1 до 2021. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно закрасить либо любую свободную клетку, либо две соседние, у левой из которых номер чётный. Кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть, как бы не играл соперник?

---

# Комбинаторика

**9.1.** Пять учеников Хогвартса изучили семь чудес и успешно сдали экзамен трём волшебникам. На экзамене каждый ученик совершил по одному чуду по указанию каждого из волшебников и получил за это плюрик.

**а)** Сколько всего плюриков поставлено на экзамене?

**б)** Приведите пример таблицы, из которой видно, кто кому какое чудо продемонстрировал.

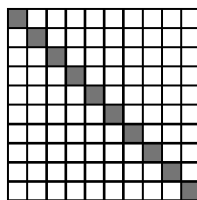
**9.2.** На прямой отметили 5 точек. Сколько есть отрезков с концами в отмеченных точках?

**9.3.** Выпишите без повторов все числа, которые можно представить как произведение двух однозначных простых чисел (возможно, равных). Сколько их?

**9.4. а)** Мальвина велела Буратино выписать все двузначные числа, у которых обе цифры нечётны и не повторяются. Если он пропустит хотя бы одно, то Мальвине придётся посадить его в чулан. Посоветуйте Буратино, как организовать работу так, чтобы не попасть в чулан. Сколько всего чисел ему придётся выписать?

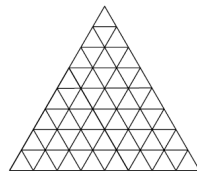
**б)** Тем временем Мальвина выписала все трёхзначные числа, у которых все цифры нечётны и не повторяются. Сколько времени она потратила, записывая по одной цифре в секунду?

**9.5.** Сколько клеток в квадрате **а)**  $10 \times 10$ ; **б)**  $2020 \times 2020$  лежат выше главной диагонали (на рисунке справа она закрашена)?



**9.6.** На прямой отметили **а)** 10; **б)** 2020 точек. Сколько есть отрезков с концами в отмеченных точках?

**9.7. а)** На сколько меньших треугольничков со стороной 1 разбит треугольник со стороной 8 на рисунке справа?



**б)** А сколько треугольничков со стороной 1 получится, если аналогичным образом разбить треугольник со стороной 2020?

**9.8.** Из спичек сложен разбитый на клетки квадрат  $8 \times 8$ , сторона каждой клетки — одна спичка. Сколько всего спичек понадобилось?

**9.9.** У скольких двузначных чисел сумма цифр — простое число?

**9.10.** Планета Рубик имеет форму куба с ребром 4000 км. Каналы идут по ребрам куба и по граням, так что вся суша разделена на одинаковые квадратные клетки, каждая со стороной 200 км. Найдите общую длину каналов на планете (в километрах).

**9.11.** Сколько всего трёхзначных чисел, у которых первая и вторая цифры разной чётности, а сумма цифр делится на 10?

**9.12.** *Палиндром* — это число, которое не меняется при записи задом наперёд (например, 9, 11, 2002). Сколько трёхзначных палиндромов делятся на 3?

## Оценка + пример

---

**10.1.** Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата  $8 \times 8$ ?

**10.2.** Найдите наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $n!$  делится на 18, на 19, на 20 и на 21. Напомним, что  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ .

**10.3.** Несколько камней весят вместе 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве трёхтонок (грузовиков грузоподъёмность 3 тонны каждый) можно увезти этот груз за один раз?

**10.4.** Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить монетный двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

**10.5. а)** В магазине приходится взвешивать на весах товары массой в целое число килограммов — от 1 кг до 15 кг. Какое наименьшее число гирь должно быть для этого в магазине, если гири кладутся на одну чашку весов, а продукты на другую? **б)** А какое наименьшее число гирь должно быть в магазине, где взвешивать нужно товары целой массой от 1 до 40 кг, но гири можно класть на обе чашки весов?

**10.6.** Какое наименьшее число клеточек на доске  $8 \times 8$  нужно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:

**а)** в любом квадратике  $2 \times 2$ ; **б)** в любом уголке из трёх клеточек?

**10.7.** На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Какое минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?

**10.8.** Сколько (минимум, максимум, а как в промежутке между минимумом и максимумом) клеток можно отметить на доске  $8 \times 8$  так, чтобы в каждом квадрате  $3 \times 3$  была ровно одна отмеченная клетка?

**10.9.** Перед малышом и Карлсоном стоит семь коробочек с конфетами: в первой — одна конфета, во второй — две, ..., в седьмой — семь. Они договорились есть конфеты по очереди. За раз можно взять одну конфету из любой коробочки, первую конфету ест Карлсон. Если кто-то съедает последнюю конфету коробочки, то забирает пустую коробочку себе. Какое наибольшее количество коробочек сможет получить Малыш, как бы ни старался Карлсон ему помешать?

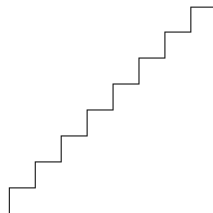
---

**11.1.** Существуют ли два последовательных целых числа:

- а) у каждого из которых сумма цифр делится на 4;
- б) у которых одинаковая сумма цифр?

**11.2.** На рисунке справа показана лестница. Можно ли разрезать её:

- а) на две части и сложить из них прямоугольник;
- б) на три части и сложить из них квадрат?



**11.3.** Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков во всех кучках было различным (и ненулевым)?

**11.4.** Числитель и знаменатель положительной дроби увеличили на 10. Могла ли дробь при этом уменьшиться?

**11.5.** Можно ли в примере на сложение заменить одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными так, чтобы получилось ОДИН + ОДИН + ПЯТЬ = СЕМЬ?

**11.6.** Можно ли разложить 99 орехов на 10 кучек так, чтобы любые кучки отличались, но не более чем в три раза?

**11.7.** Про 25 чисел известно, что сумма любых четырёх из них положительна. Может ли сумма всех 25 чисел быть отрицательна?

**11.8.** В клетках клетчатого прямоугольника  $3 \times 5$  лежат 15 разных монет. Они образуют восемь рядов: три горизонтальных и пять вертикальных. Известно, что семь рядов имеют одну и ту же массу, а восьмой — другую. Можно ли определить этот ряд с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь?

**11.9.** Можно ли раскрасить клетки доски  $5 \times 5$  в два цвета — чёрный и белый — так, чтобы у каждой белой клетки были ровно три соседние по стороне чёрные клетки, а у каждой чёрной клетки — ровно две соседние по стороне белые?

**11.10.** На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км дорог. Сможет ли правительство страны соединить сеть дорог все свои города?

**12.1.** Сколько кубиков в каждой из пирамидок на рисунке справа?

**12.2.** На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй раз — 15. Что написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

**12.3.** Планета «Куб» имеет форму куба, каждой гранью которого правит либо правдивый, либо лживый король. Однажды каждый король заявил, что правители большинства сопредельных с его владениями граней лживы. Сколько было лживых королей на самом деле?

**12.4.** Два куба  $3 \times 3 \times 3$  имеют ровно два общих кубика.

**а)** Из скольких кубиков состоит такая фигура?

**б)** Из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры?

**12.5. а)** К каждой грани кубика  $1 \times 1 \times 1$  приклеили ещё по одному кубу  $1 \times 1 \times 1$ . Получился «ёж» (см. рисунок справа). Из скольких квадратиков состоит его поверхность?

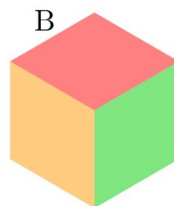
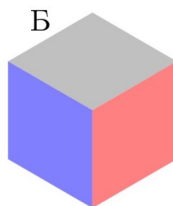
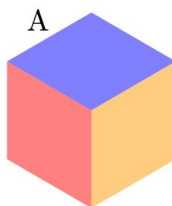
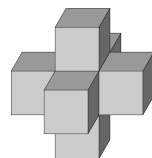
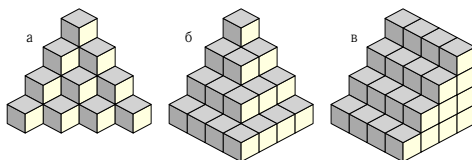
**б)** К каждой грани на поверхности «ежа» из пункта а) приклеили кубик. Назовём полученную фигуру «толстым ежом». Из скольких кубиков состоит «толстый ёж»? Из скольких квадратиков состоит его поверхность?

**12.6. а)** Какое наименьшее число прямолинейных разрезов нужно сделать, чтобы разрезать куб  $3 \times 3 \times 3$  на маленькие кубики  $1 \times 1 \times 1$ ? После каждого разреза полученные части можно перекладывать как угодно. **б)** Тот же вопрос для куба  $4 \times 4 \times 4$ .

**12.7.** На рисунках А, Б, В справа изображён один и тот же куб. Грань какого цвета расположена напротив красной?

**12.8.** Какое наибольшее число брусков  $1 \times 2 \times 2$  можно уместить в кубе  $3 \times 3 \times 3$  без пересечений?

**12.9.** Есть много единичных кубиков, причём некоторые из них прозрачные, а некоторые нет. Из них требуется сложить куб  $5 \times 5 \times 5$ . Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на куб со стороны любой из его граней куб казался непрозрачным?



## Игра «Тише едешь — дальше будешь!». Задачи

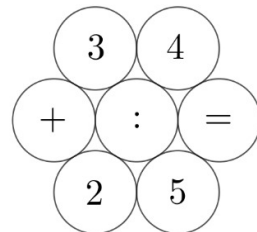
Задачи могут быть расположены не по возрастанию сложности!

В некоторых задачах возможно несколько ответов, тогда нужно указывать их все.

Неполный ответ считается неверным!

1. Саша спускался по лестнице из своей квартиры на первый этаж. Когда он спустился на несколько этажей, оказалось, что он прошел треть пути. Когда он спустился еще на один этаж, ему осталось пройти половину пути. На каком этаже живёт Саша?

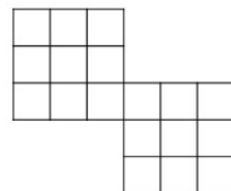
2. В кружочках написаны цифры и знаки арифметических действий, как показано на рисунке справа. Разрешается переходить из любого кружочка в соседний, записывая при этом в строку то, что написано в кружочках. Как, начав с одного из них, обойти всё по одному разу так, чтобы записанное равенство оказалось верным?



3. Прямоугольник разбили двумя прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Один из них является квадратом, а периметры двух соседних с ним прямоугольников равны 20 и 16. Чему равна площадь исходного прямоугольника?

4. На бесконечной шахматной доске стоят не бьющие друг друга два шахматных ферзя. Сколько на доске клеток, которые находятся под боем обеих ферзей?

5. Сколькими способами можно разрезать изображенную на рисунке справа фигуру на доминошки (прямоугольники  $1 \times 2$ )?



6. В зале стоят шесть стульев в два ряда — по три стула в каждом, один ряд ровно за другим. В зал пришли шесть человек попарно различного роста. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы каждый человек, сидящий в первом ряду, был ниже человека, сидящего за ним?

7. Целая часть числа  $[X]$  — это наибольшее целое число, не превосходящее числа  $X$ . Например,  $[3,6] = 3$ ,  $[\frac{1}{3}] = 0$ ,  $[-2,5] = -3$ . Известно, что  $[A] = 2013$  и  $[B] = 3$ . Сколько различных значений может принимать выражение  $[A \cdot B]$ ?

8. Какой угол (в градусах) образуют часовая и минутная стрелки часов в двадцать минут первого?

9. Чэнь Сывэнь изучает русский язык. Он записал некоторое трёхзначное число сначала цифрами, а потом — словами по-русски. Оказалось, что все цифры различны и идут в порядке возрастания, а все слова начинаются с одной и той же буквы. Какое число он записал?

10. Бетти и Кетти путешествуют на суперпоезде. Бетти едет в сто семнадцатом вагоне с начала поезда, Кетти — в сто тридцать четвертом с конца. Оказалось, что они едут в соседних вагонах. Сколько всего вагонов в этом поезде?

11. Два рыцаря и несколько лжецов встали в круг так, чтобы каждый из них мог произнести фразу «Оба моих соседа — лжецы». Сколько лжецов могло быть среди них?

12. У Пети в кармане могут быть монеты в 1 рубль, в 2 рубля, в 5 рублей и 10 рублей. Если Петя наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдётся монета в 1 рубль. Если Петя наугад вытащит из кармана 4 монеты, среди них обязательно найдётся монета в 2 рубля. Петя вытащил из кармана 5 монет. Назовите эти монеты.

13. В ряду кинотеатра 10 мест, на них должны сесть 5 мальчиков и 5 девочек. Сколькими способами можно их рассадить так, чтобы у каждой девочки был сосед-мальчик, но ни у какого мальчика не было соседа-мальчика?

14. Король прошёлся по шахматной доске  $8 \times 8$ . Стартовав из левой нижней клетки, он сделал восемь ходов. Каждый ход был вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Найдите число возможных маршрутов.

## Отбрось лишнее!

---

**14.1.** Рассказ «Отбрось лишнее!» расположен с 34-й по 69-ю страницу в книге. Сколько страниц занимает рассказ?

**14.2.** Сколько всего **а)** двузначных; **б)** пятизначных чисел?

**14.3.** У скольких натуральных чисел от 1 до 2021 в записи есть по крайней мере две различные цифры?

**14.4.** Из 1000 белых кубиков сложили куб  $10 \times 10 \times 10$  и покрасили его снаружи синей краской. У скольких кубиков: **а)** ровно одна грань синяя? **б)** есть хоть одна синяя грань?

**14.5.** Пятеро студентов вместе снимают квартиру. Как-то раз они устроили вечеринку, на которую пришли ещё 25 их друзей, причём каждый приходящий пожимал руки всем собравшимся. Сколько получилось рукопожатий?

**14.6.** В пиццерии есть курица, ветчина, грибы, перец, помидоры, ананасы и оливки. Сколько видов пиццы с начинкой можно приготовить, если по заказу клиента можно класть в пиццу:

**а)** любой набор начинок;

**б)** любые из этих начинок, но не менее двух;

**в)** любые из этих начинок, но не менее трёх;

**г)** любые из этих начинок, но не более пяти?

**14.7.** У скольких пятизначных чисел нет четырёх одинаковых цифр подряд?

**14.8.** Шесть альпинисток восходят на вершину, идя гуськом одна за другой. Инструктор настаивает, чтобы Поля не шла сразу за Олей, а Таня — сразу за Аней. Сколько порядков восхождения устроят инструктора?

**14.9.** Конюшню с бетонными стенами  $6 \times 6$  м разбили внутренними деревянными перегородками на стойла  $1 \times 2$  м. Чему может быть равна общая длина деревянных перегородок? Найдите все возможные ответы!

**14.10.** У каждого из тридцати шестиклассников есть одна ручка, один карандаш и одна линейка. После их участия в олимпиаде оказалось, что 26 шестиклассников потеряли ручку, 23 — линейку и 21 — карандаш. Найдите наименьшее возможное количество шестиклассников, потерявших все три предмета.

**14.11.** Сколькими способами можно расставить различные цифры от 1 до 9 в клетки таблицы  $3 \times 3$  так, чтобы сумма трёх цифр в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали была не меньше 8?

---

## Найди одинаковые!

---

*Среди предложенных ниже задач есть несколько групп «одинаковых». Найдите эти группы: установите соответствие между «одинаковыми» задачами. И решите их!*

**15.1.** Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?

**15.2.** Сколькими способами из 36 балерин можно выбрать исполнительниц роли Белого Лебедя и Чёрного Лебедя?

**15.3.** Сколько сторон и диагоналей вместе у 36-угольника?

**15.4.** Сколькими способами можно раздать 36 разных конфет 36 девочкам (по одной конфете каждой девочке)?

**15.5.** Есть 6 видов конфет, по мешку каждого вида. Сколько есть способов угостить 6 девочек так, чтобы ни одной не досталось двух одинаковых конфет?

**15.6.** Сколько существует способов раскрасить каждую клетку таблицы  $6 \times 6$  в один из двух цветов?

**15.7.** Сколькими способами можно расставить в клетки таблицы  $6 \times 6$  различные натуральные числа от 1 до 36 (по одному числу в клетку)?

**15.8.** Сколькими способами можно поставить на доску  $6 \times 6$ : **а)** чёрную и белую ладью; **б)** две белые ладьи? Способы, отличающиеся только поворотом доски, считаются различными!

**15.9.** В магазине продаются чашки 6 видов и блюда 6 видов. Сколькими способами можно выбрать 2 различных набора из чашки и блюда?

**15.10.** Есть натуральные числа от 1 до 71 включительно. Сколькими способами можно выбрать из них два различных числа, чтобы их сумма была нечётной?

**15.11.** Сколькими способами можно на доске  $36 \times 36$  расставить 36 одинаковых ладей, не бьющих друг друга? Две ладьи бьют друг друга, если стоят на одной вертикали или на одной горизонтали. Способы, отличающиеся только поворотом доски, считаются различными!

**15.12.** Во рту у древней акулы 6 рядов зубов по 6 штук в каждом ряду. Археологи собирают ископаемые останки древних акул. Сколько максимум древних акул в коллекции археологов могут иметь попарно различные наборы зубов (то есть если взять любых двух акул из коллекции, найдётся место, где у одной зуб есть, а у другой — нет)?

**15.13.** Компьютер работает с двоичными кодами, которые представляют собой последовательности из нулей и единиц (например, 001011101). Количество знаков в коде называется его *длиной*. Сколько разных символов можно закодировать кодами длины 36?

**15.14.** Имеется 34 ёжика и 2 дикобраза. Сколько существует способов отправить по одному зверьку в 36 зоопарков (если ёжики друг от друга неотличимы и дикобразы тоже)?

**15.15.** На линейку длиной 70 см нанесены деления: 0 см, 1 см, 2 см, ..., 70 см. Сколькими способами можно указать на линейке два деления, расстояние между которыми равно нечётному числу сантиметров?

---

## Шахматная раскраска

**17.1.** Может ли шахматный конь пройти с клетки А1 на клетку Н8, побывав по дороге на каждой из остальных клеток ровно по одному разу?

**17.2.** Можно ли замостить доску: **а)**  $8 \times 8$ ; **б)**  $10 \times 10$  с помощью Т-тетрамино? (*Тетрамино* — связанная фигура из четырёх клеток, как в «тетрисе». Т-тетрамино имеет форму буквы Т.)

**17.3.** По вершинам кубика ползает муха. Каждую секунду муха переползает по ребру в соседнюю вершину кубика. Может ли через час муха оказаться в вершине, которая соединена ребром с начальной вершиной?

**17.4.** У Коли был набор «Юный паркетчик». В нём было несколько квадратиков  $2 \times 2$  и несколько тетрамино вида «Т». Из набора Коля без наложений складывал доску  $12 \times 12$  (и лишних паркетинок не оставалось). Коля потерял один квадратик, и в магазине купил вместо него тетрамино вида «Т». Докажите, что теперь Коля не сможет сложить доску  $12 \times 12$ .

**17.5.** В одной вершине куба написано число 1, а в остальных — нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа делились: **а)** на 2; **б)** на 3?

**17.6.** Можно ли расставить на шахматной доске: **а)** 6 коней; **б)** 7 коней так, чтобы каждый конь бил ровно двух других?

**17.7.** Тридцать пять хулиганов вышли на демонстрацию с шариками и выстроились в пять колонн по семь человек. По команде каждый проткнул иголкой шарик своего соседа (спереди, сзади или сбоку). Какое наименьшее число целых шариков могло при этом остаться?

**17.8.** В каждой клетке фигуры, показанной на рисунке, стоит гири. Из них 18 гирь — настоящие, весящие одинаково. Две — фальшивые, они легче настоящих и, возможно, разной массы. Фальшивые гири расположены в соседних по стороне клетках. Как за три взвешивания на чашечных весах (без других гирь) узнать, в каких клетках расположены фальшивые гири?

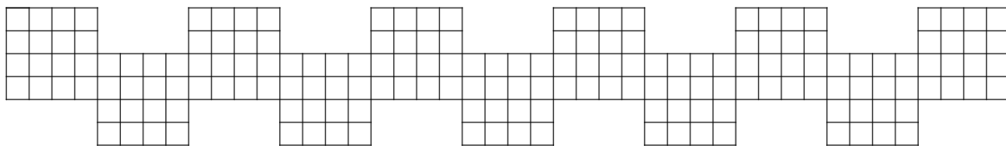
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**17.9.** Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

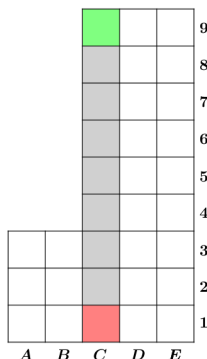
|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
| 1 | 4 | 5 | 8 | 9  |
| 2 | 3 | 6 | 7 | 10 |

**18.1.** Представьте 49 как сумму 20 слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

**18.2.** Разрежьте фигуру на рисунке по границам клеток на 33 прямоугольника одинакового периметра.



**18.3.** В красной клетке фигуры на рисунке стоит шахматный конь. Он должен дойти до зелёной клетки, не заходя ни в какую клетку дважды, а серые клетки он должен пройти все и строго снизу вверх по порядку. Придумайте маршрут и посчитайте число ходов.



**18.4.** К левому берегу реки подошли 7 монахов и 6 людоедов. У берега есть двухместная лодка. Ни в какой момент времени монахи не должны оказаться в меньшинстве на одном берегу с людоедами. Как им всем переправиться на правый берег?

**18.5.** Можно ли поставить в ряд больше 100 детей так, чтобы у каждой девочки был хотя бы один сосед-мальчик, а хотя бы одна соседка-девочка была ровно у половины мальчиков?

**18.6.** Запишите по кругу более 25 натуральных чисел так, чтобы каждое число было делителем суммы своих соседей и общая сумма чисел была ровно в два с половиной раза больше количества чисел в круге.

**18.7.** На левом берегу реки три человека и 10 ящиков. Есть трёхместная лодка, каждое место может занимать человек или ящик. Погрузить в лодку или выгрузить из лодки ящик можно только втроём. Других людей нет. Как им всем переправиться на правый берег и перевезти все ящики?

**18.8. а)** На крайней клетке полосы  $1 \times 16$  сидит блоха. Одним прыжком она может перепрыгнуть через одну или две клетки и приземлиться в следующей. Как ей побывать на всех клетках ровно по одному разу?  
**б)** То же для полосы  $1 \times 64$ .

**18.9.** Число 29 можно представить как сумму натуральных чисел, у которых сумма обратных величин равна единице:  $29 = 2 + 3 + 12 + 12$  и  $1/2 + 1/3 + 1/12 + 1/12 = 1$ . Можно ли так представить число 2400?

*Признаки делимости на 3 и 9: целое число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9).*

**19.1.** Известно, что число 65349\_0712 делится **а)** на 9; **б)** на 3. Какая цифра может стоять на месте пропуска? Укажите все возможные варианты!

**19.2.** Запишем подряд цифры от 1 до 9, получим число 123456789. Простое оно или составное (то есть делится ли оно нацело на что-нибудь, кроме единицы и самого себя)? Изменится ли ответ в задаче, если каким-то образом поменять порядок цифр в этом числе?

**19.3.** Делится ли число 32561698 на 12? Решите эту задачу: **а)** с помощью признака делимости на 4; **б)** с помощью признака делимости на 3.

**19.4. а)** Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и т. д. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на 3, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника? **б)** Тот же вопрос, но с делимостью на 9.

**19.5.** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

**19.6.** У числа 100 500! вычислили сумму цифр. Затем у полученной суммы снова вычислили сумму цифр, потом ещё раз, и так до тех пор, пока не получилось однозначное число. Какое это число?

**19.7.** Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число, состоящее из двоек и троек. Сейф откроется, если двоек в коде больше, чем троек, а сам код делится и на 3, и на 4. Какой код может открывать сейф?

**19.8.** В каждом пункте укажите все возможные варианты ответа.

**а)** Число  $2*45$  делится на 9. Какую цифру заменили звёздочкой?

**б)** Число  $29*45*$  делится на 18. Какие цифры заменили звёздочками?

**в)** Число  $72*4*$  делится на 45. Какие цифры заменили звёздочками?

**г)** Число  $1*456*$  делится на 36. Какие цифры заменили звёздочками?

**19.9.** На какую наибольшую степень тройки делится произведение  $3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot \dots \cdot 3333333333$  (в последнем множителе десять троек)?

**19.10. а)** Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704?

**б)** Может ли натуральное число, записываемое с помощью 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек, быть квадратом некоторого другого натурального числа?

**19.11.** Существует ли натуральное число, которое при делении на сумму своих цифр как в частном, так и в остатке даёт число 2020?

**19.12. а)** Верно ли, что если натуральное число делится на 27, то и его сумма цифр делится на 27? **б)** Докажите, что любое целое число, которое втрое больше суммы своих цифр, делится на 27.

## ГРАФическое описание

**20.1.** Страна Лапландия почти вся состоит из непреодолимых гор и рек. В ней есть шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Известно, что из А проложены дороги в Б и Г, из Б — в А, Г и Д, из В — в Г и Е, из Г — в В и Д, из Д — в Б и Г, из Е — только в В. Все остальные дороги непроходимы.

а) Нарисуйте карту Лапландии.

б) Нарисуйте карту Лапландии так, чтобы дороги не пересекались.

в) Может ли житель города А попасть в город Д, минуя город Г?

г) Сможет ли он при тех же условиях попасть в город Е?

**20.2.** а) Кот Васька поймал 6 марсианских мышек (у марсианских мышек по три хвоста) и связал их хвостами так, что свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать? б) Васька поймал ещё одну мышку и решил, развязав некоторые из узелков, связать эту мышку со всеми остальными. Сможет ли он это сделать так, чтобы по-прежнему не было свободных хвостов?

**20.3.** В стране 2021 город, некоторые из них соединены дорогами. Может ли из всех городов выходить попарно различное число дорог?

**20.4.** В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Авиационное сообщение между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний для этого нужно?

**20.5.** Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими?

**20.6.** В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с 7 другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

**20.7.** В некоторой стране из каждого города выходит ровно 2020 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого другого.

**20.8.** Можно ли изобразить на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 3 других (считая, что в одной точке могут пересекаться не более двух отрезков)? Сколько точек пересечения получится, если это возможно?

**20.9.** В стране 2021 город. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно оставить одну из этих авиакомпаний так, что из любого города можно будет попасть в любой другой рейсами этой авиакомпании.

**20.10.** В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов — по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.

## Инварианты

**Инвариант** — это величина или свойство, которое не меняется при разрешённых в задаче действиях или одинаково во всех возможных по условию задачи ситуациях. Во всех задачах этого занятия нужно найти какой-нибудь инвариант — чётность, раскраску, сумму или произведение каких-нибудь чисел, и т. д.

**21.1.** Рита, Люба и Варя решали задачи. Перед этим они купили конфет и условились, что за каждую решённую задачу девочка, решившая её первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, но одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются.

**21.2.** На шахматной доске  $5 \times 5$  клеток расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней (по стороне) с той, на которой она стояла в прошлый раз?

**21.3.** На доске написаны натуральные числа: **а)** от 1 до 2011; **б)** от 1 до 2021. Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать разность. Можно ли за несколько операций добиться того, чтобы на доске остались только нули?

**21.4.** В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — 5 камней. **а)** Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не более чем на один камень? **б)** Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

**21.5.** Дана доска  $8 \times 8$  с шахматной раскраской. **а)** Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Можно ли в итоге получить доску, у которой ровно одна чёрная клетка? **б)** Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки любого квадрата  $2 \times 2$ . Можно ли в итоге оставить на доске ровно одну чёрную клетку?

**21.6.** В клетках квадратной таблицы  $10 \times 10$  расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли быть, что из них ровно 19 делятся на три?

**21.7.** На столе лежат 40 красных, 40 синих и 40 зелёных фишек. Можно снять со стола две фишки разного цвета и вместо них выложить фишку третьего цвета. Какое наименьшее количество фишек можно оставить на доске?

**21.8.** Изначально на доске написаны числа 10, 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число и поделить его на любой из его простых делителей (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из остальных чисел умножить на простое число, но не совпадающее с тем, на которое перед этим делили первое число (например, 50 и 20 можно заменить на  $50 : 5 = 10$  и  $20 \cdot 7 = 140$ ). Докажите, что такими действиями нельзя получить набор 20, 30, 40, 50, 60.

**21.9.** Написанное на доске натуральное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9; либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций: **а)** из числа 202020 получить число 212121; **б)** из числа 20202020 получить число 20212021?

## Праздничная четырёхлетка

---

**22.1.** Саша выписала натуральные числа от одного до ста, а Миша часть из них стёр. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стёр Миша?

**22.2.** На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

**22.3.** Незнайка выписал семь двузначных чисел в порядке возрастания. Затем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось вот что: ХА, АЙ, АХ, ОЙ, ЭМ, ЭЙ, МУ. Докажите, что Незнайка что-то перепутал.

**22.4.** Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные — красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков ровно треть — красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи.

**22.5.** На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?

**22.6.** Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

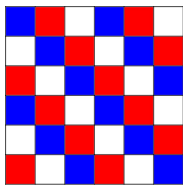
**22.7.** Шесть математиков пошли на рыбалку. Вместе они наловили 100 рыб, причём все поймали разное количество. После рыбалки они заметили, что любой из них мог бы раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у остальных пятерых стало поровну рыб. Докажите, что один рыбак может уйти домой со своим уловом и при этом снова каждый оставшийся сможет раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у них получилось поровну.

**22.8.** Каждая грань куба  $6 \times 6 \times 6$  разбита на клетки  $1 \times 1$ . Куб оклеили квадратами  $2 \times 2$  так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.)

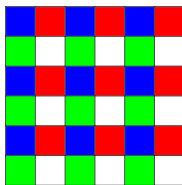
**22.9.** Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 ёлок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растёт сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растёт сосна.

## Не шахматами едиными

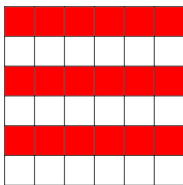
*Эти и другие раскраски пригодятся вам при решении задач из этого листочка.*



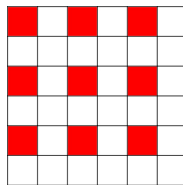
*диагональная  
в 3 цвета*



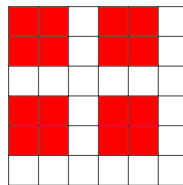
*4-цветная  
решётка*



*тигровая  
раскраска*



*«окошки»*



*крупные  
«окошки»*

**23.1.** На каждой клетке доски  $7 \times 7$  сидит жук. По команде все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что после этого найдётся 7 свободных клеток. Вам поможет «тигровая» раскраска.

**23.2.** Можно ли из 13 кирпичей  $1 \times 1 \times 2$  сложить куб  $3 \times 3 \times 3$  с дыркой  $1 \times 1 \times 1$  в центре? Вам поможет шахматная раскраска.

**23.3.** Можно ли замостить доску  $10 \times 10$  фигурами L-тетрамино (т. е. фигурами из 4 клеток в форме буквы L или Г)? Вам поможет «тигровая» раскраска.

**23.4.** Можно ли квадрат  $10 \times 10$  разрезать на части  $1 \times 4$ ? Решите задачу:

**а)** с помощью диагональной раскраски в 4 цвета (как она устроена?);

**б)** с помощью 4-цветной решётки; **в)** с помощью «окошек».

**23.5. а)** Можно ли из квадрата  $7 \times 7$  вырезать 10 квадратов  $2 \times 2$ ? **б)** Из листа клетчатой бумаги размером  $29 \times 29$  клеточек вырезали 99 квадратиков  $2 \times 2$  (режут по линиям сетки). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик. Вам помогут «окошки» (обычные и крупные).

**23.6.** На клетчатой бумаге (неизвестно, какого размера) отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них наверняка можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом.

*Выберите раскраску сами.*

**23.7.** В квадрате  $5 \times 5$  без наложений разместили 8 прямоугольников  $1 \times 3$ . Какая клетка могла оказаться не накрытой ни одним прямоугольником? Найдите все возможные варианты. Вспомните, в какой задаче вам встречались такие прямоугольники и что вы с ними тогда делали.

**23.8.** В левый нижний угол шахматной доски  $8 \times 8$  поставлено в форме квадрата  $3 \times 3$  девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку (по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки в форме квадрата  $3 \times 3$ :

**а)** в левом верхнем; **б)** в правом верхнем углу? Выберите раскраску сами.

**23.9.** Можно ли три попарно соседние грани куба  $4 \times 4 \times 4$  оклеить 16 полосками  $3 \times 1$ ? Придумайте такую раскраску, чтобы каждый прямоугольник  $3 \times 1$  содержал чётное число красных клеток, а три соседние грани куба — нечётное.

## Математическая абака. Правила

- Игра рассчитана на команды из 3–4 человек.
- Каждая команда размещается в отдельной виртуальной комнате.
- В начале игры каждая команда получает условия всех задач. Задачи разделены на 4 темы: «Возраст», «Комбинаторика», «Делимость», «Всяко-разно». По каждой теме есть 4 задачи стоимостью 10, 20, 30 и 40 очков.
- Задачи можно решать в произвольном порядке. Проверяются только ответы. Ответ к каждой решённой задаче команда отправляет на проверку преподавателю. На сдачу ответа к каждой задаче есть только одна попытка.
- За неверный ответ команда получает 0 очков. За верный ответ команда получает соответствующее количество очков.
- Помимо очков за решение задач, есть бонусы: за решение всех задач по одной теме команда дополнительно получает 40 очков, а за решение всех задач данной стоимости — столько очков, сколько стоит одна из этих задач (например, за решение всех задач стоимостью 10 очков — ещё 10 очков).
- Подсчёт очков происходит в процессе игры и непрерывно демонстрируется участникам в таблице.
- Игра заканчивается через полтора часа после начала (или тогда, когда все команды сдадут ответы ко всем задачам, если это произойдёт раньше).
- Итог подводится по сумме очков.

## Математическая абака. Задачи

### Возраст

10. Сумма возрастов четырёх друзей — 37 лет. Сколько лет им будет вместе через 7 лет?
20. Михаил на вопрос, каков его возраст, ответил, что через 17 лет ему будет в 5 раз больше лет, чем 3 года назад. Сколько лет Михаилу сейчас?
30. У Маши и её родителей общий день рождения — 1 сентября. В сентябре 20020 года Маша была в 8 раз младше своей мамы, а в сентябре 20022 года — в 8 раз младше папы. На сколько лет папа старше мамы?
40. На вопрос «Сколько вам лет?» марсианки переглянулись. Одна из них улыбнулась и сказала: «Ми недавно исполнилось 22 месяца, а вот Ме постарше, ей 21 миллион лет». Вторая тоже улыбнулась: «На самом деле Ми 21 миллион лет, а вот Мо всего 19 тысяч лет». И здесь рассмеялась третья: «Мо в действительности всего 18 недель, 21 миллион лет на самом деле Ма». А четвёртая честно сообщила, что ровесниц среди них нет, а каждая до этого верно назвала возраст одной марсианки и перепутала возраст второй с чьим-то другим. Определите возраст каждой марсианки.

### Комбинаторика

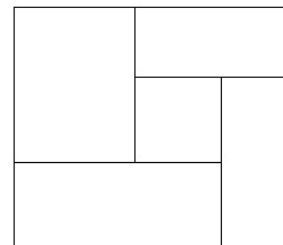
10. Назовём натуральное число «супернечётным», если оно состоит только из нечётных цифр. Сколько существует трёхзначных супернечётных чисел, все цифры каждого из которых различны?
20. Перед нами 20 закрытых замков и 20 похожих ключей к ним. К каждому замку подходит только один ключ, но ключи смешались. Возьмем один из замков, назовем его первым и попробуем открыть его каждым из 20 ключей. В лучшем случае он откроется первым же ключом, а в худшем — только двадцатым. Скольких попыток будет наверняка достаточно, чтобы открыть все замки (именно открыть, а не только узнать, какой ключ от какого замка)?
30. Сколькими способами можно разбить 10 человек на пары?
40. Каждый сотрудник фирмы выписывает две газеты. Каждую газету выписывают пять человек, и каждую возможную пару газет выписывает ровно один человек. Сколько сотрудников в фирме?

### Делимость

10. Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число задумал Вася?
20. Среди двузначных чисел найдите все, которые не кратны 13 и не будут делиться на 13, даже если в их записи заменить одну из цифр (первую цифру заменять на 0 нельзя).
30. Найдите три последовательных натуральных числа, сумма которых оканчивается на 2021 (но не равна 2021), с наименьшей возможной суммой.
40. Мальчик Вася умеет писать только цифры 1 и 2. Какое наименьшее натуральное число, делящееся нацело на 2016, он сможет написать?

### Всяко-разно

10. Прямоугольник разрезали на пять частей так, как показано на рисунке справа. При этом центральная часть оказалась квадратом, а из четырёх остальных прямоугольников периметры трёх равны 12, 13 и 15. Чему может равняться периметр четвёртого прямоугольника?



20. Сколько квадратов натуральных чисел среди чисел 1, 2, 3, 4, ..., 2021?
30. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму, потом второй проиграл первому половину своих монет, затем опять первый проиграл половину монет. В результате у первого оказалось 35 монет, а у второго 77. Сколько монет было у каждого из пиратов перед началом игры?
40. В одной школе учатся четверо приятелей — все в разных классах: самый младший — в первом классе, а самый старший — в четвёртом. Определите имя, фамилию и класс каждого из них, если известно, что:
- 1) Боря — не первоклассник;
  - 2) когда Вася идёт в бассейн на соседнюю с его улицей улицу Южную, Иванов гуляет с собакой у себя во дворе на улице Зелёной;
  - 3) Миша на год старше Димы;
  - 4) Боря и Орлов — соседи и живут на улице Северной;
  - 5) Крылов познакомился с Петровым ровно год назад, будучи еще первоклассником;
  - 6) Вася отдал Боре учебник, по которому сам занимался в прошлом году.