Занятие 1. Знакомство

1.1. Можно ли выбрать несколько целых чисел так, чтобы среди них ровно два не делились на 2, ровно три не делились на 3, ровно 4 не делились на 4, ровно 5 не делились на 5 и ровно 6 не делились на 6?

1.2. Баба-Яга должна прибыть на Лысую Гору ровно в полночь. Она рассчитала, что если полетит на ступе со скоростью 50 км/ч, то опоздает на 2 часа, а если на электровенике со скоростью 150 км/ч, то прилетит на 2 часа раньше. А чтобы прибыть на Лысую Гору точно в срок, Баба-Яга воспользовалась метлой. В котором часу Баба-Яга вылетела и с какой скоростью летела на метле?

1.3. Квадрат со стороной 7,5 см разрезали двумя параллельными разрезами на три прямоугольника. Оказалось, что периметр одного из них вдвое меньше суммы периметров двух других. Чему он равен?

1.4. Как из 15-литровой бочки отлить 8 л воды, имея две бочки вместимостью 5 л и 9 л? Переливать воду можно только в эти две бочки.

1.5. Гриб называется *плохим*, если в нём не меньше 10 червей. В корзине 91 плохой гриб и 10 хороших. Могут ли все грибы в корзине стать хорошими, если некоторые червяки переползут в другие грибы?

1.6. Винни-Пух сел на диету и каждый день ел на одну банку варенья меньше и на одну банку мёда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 264 банки варенья и 187 банок мёда. Сколько дней длилась диета?

1.7. На кружке каждая девочка знакома с 5 девочками и 6 мальчиками, а каждый мальчик — с 7 девочками и с 4 мальчиками. Какое наименьшее количество учеников может быть на кружке?

1.8. Клетчатый квадрат 2021×2021 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Занятие 2. Арифметические задачи

При решении задач этого занятия старайтесь не использовать уравнений!

2.1. В биологической лаборатории находятся люди, мыши и змеи. Вместе у них 40 голов, 100 ног и 36 хвостов. Сколько в лаборатории змей?

2.2. Катер проплывает 90 км по течению за то же самое время, что 70 км против течения. Какое расстояние за это же время сможет проплыть плот?

2.3. От Нижнего Новгорода до Астрахани пароход идёт 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени будут плыть плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

2.4. Если идти вниз по движущемуся эскалатору, то на спуск потратишь 1 минуту. Если увеличить собственную скорость в два раза, то спустишься за 45 секунд. За какое время можно спуститься, стоя на этом эскалаторе неподвижно?

2.5. Артём, в силу природной лени, обычно делает работу за 6 часов. Но если он выпьет квасу, то выполняет работу за 3 часа. Артём начал выполнять работу в полдень, но в какой-то момент ему принесли квас, поэтому он закончил работу за 4 часа. Когда Артёму принесли квас?

2.6. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

2.7. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мёд из одного горшка, не отвлекаясь на разговоры. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скоростью Винни-Пуха — то сократился бы на 1 минуту. За какое время мёд из горшка был полностью съеден?

3.1. Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 (5 строк, 10 столбцов) так расставить числа, чтобы сумма чисел в каждой строке равнялась 30, а сумма чисел в каждом столбце равнялась 10?

3.2. Взяли несколько одинаковых квадратов. Вершины каждого из них пометили цифрами 1, 2, 3 и 4 в произвольном порядке. Затем их сложили в стопку. Могла ли сумма чисел в каждом углу оказаться равной 12?

3.3. Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

3.4. В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

3.5. Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звёздочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звёздочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звёздочка? (В каждой клетке может стоять не более одной звёздочки.)

3.6. 2021 шарик раскрасили в 7 цветов радуги (каждый шарик — в один цвет). На каждом шаре написали общее количество шариков такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

3.7. У Маши есть монеты по 2 и 5 рублей. Если она возьмёт все свои 2-рублёвые монеты, ей не хватит 60 рублей, чтобы купить 4 пирожка. Если возьмёт все 5-рублёвые — не хватит 60 рублей на 5 пирожков. А всего ей не хватает 60 рублей для покупки 6 пирожков. Сколько стоит пирожок?

3.8. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых 6-угольников и чёрных 5-угольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

3.9. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

3.10. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

4.1. В комнате есть люстра, торшер и два разных светильника. Сколько есть способов включить свет в комнате, если все осветительные приборы можно включать независимо друг от друга? Порядок включения неважен.

4.2. Сколько есть 4-значных чисел: **а)** состоящих только из нечётных цифр; **б)** состоящих только из чётных цифр; **в)** в записи которых найдётся хотя бы одна нечётная цифра; **г)** в записи которых нечётных цифр хотя бы две?

4.3. У Остапа Бендера есть десять поддельных паспортов. В целях конспирации очередному милиционеру он показывает не тот паспорт, который показывал прошлому, и не тот, который позапрошлому. Сколькими способами он может пообщаться с десятью стражами порядка?

4.4. **а)** Никанор поставил на смартфон 4-значный код разблокировки и забыл его. Никанор помнит только, что в коде были числа 23 и 37. С какой попытки Никанор наверняка сможет подобрать код и разблокировать смартфон? **б)** Никанор сменил код, и теперь он состоит из 4 попарно различных цифр. С какой попытки наверняка удастся разблокировать смартфон, если знать, из каких цифр он состоит, но не знать, в каком порядке они идут?

4.5. На балу собрались 5 дам и 5 кавалеров. Сколькими способами они могут разбиться на пары «кавалер + дама»?

4.6. Сколько есть способов послать 6 писем, если для этого можно задействовать трёх курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

4.7. Сколько есть способов поставить на шахматную доску: **а)** чёрную и белую ладью; **б)** чёрного и белого короля так, чтобы они не били друг друга?

4.8. В железнодорожном купе лицом друг к другу стоят два пятиместных дивана. Из 10 пассажиров четверо хотят сидеть лицом по ходу движения, трое — лицом против хода движения, а остальным всё равно. Сколькими способами могут разместиться пассажиры в купе с учётом своих пожеланий?

4.9. В сериале «Тайна Санта-Барбары» участвует 20 героев. Каждую серию происходит одно из событий: некоторый герой узнает Тайну, некоторый герой узнает, что кто-то знает Тайну, некоторый герой узнает, что кто-то не знает Тайну. Какое наибольшее число серий может продолжаться сериал?

4.10. Клавдия Семёновна сохранила в телефоне семизначный номер своего внука. Однако, позвонив ему, она обнаружила, что записала семизначный номер неправильно — пропустила какую-то одну цифру. Сколько номеров придётся обзвонить Клавдии Семёновне, чтобы точно дозвониться до внука?

5.1. Перед чемпионатом школы по шахматам каждый участник сказал, какое место он рассчитывает занять. Ваня сказал, что займёт последнее место. По итогам чемпионата все заняли различные места, и оказалось, что каждый, кроме Вани, занял место хуже, чем ожидал. Какое место занял Ваня?

5.2. С 12:00 до 23:59 Кот Учёный спит под дубом, а с 00:00 до 11:59 рассказывает сказки. На дубе он повесил плакат: «Через час я буду делать то же самое, что делал три часа назад». Сколько часов в сутки эта надпись верна?

5.3. На каникулах для всех школьников провели шахматный турнир, соревнование по плаванию и математическую олимпиаду. Оказалось, что среди любых трёх человек найдутся два, которые победили в одном и том же соревновании. Верно ли, что из этих соревнований можно выбрать такое, что все победившие в нём школьники победили не только в этом соревновании?

5.4. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжёт. Однажды его 7 дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день?

5.5. На кружок пришли дети из двух классов: Ваня, Дима, Егор, Инна, Лёша, Саша и Таня. На вопрос: «Сколько здесь твоих одноклассников?» каждый честно ответил «Двое» или «Трое». Но мальчики думали, что спрашивают только про мальчиков-одноклассников, а девочки правильно понимали, что спрашивают про всех. Кто Саша — мальчик или девочка?

5.6. В конференции участвовали 100 человек — химики и алхимики. Каждого спросили: «Кого больше среди остальных участников: химиков или алхимиков?». Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Химики всегда говорят правду, а алхимики всегда врут. Сколько химиков среди участников конференции?

5.7. В стране живут граждане трёх типов: а) дурак считает всех дураками, а себя умным; б) скромный умный про всех знает правильно, а себя считает дураком; в) уверенный умный про всех знает правильно, а себя считает умным. В думе 200 депутатов. Президент провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По их ответам он не смог узнать количество умных. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он дал ответ про всю думу, включая себя, и прочитав его, президент всё понял. Сколько всего умных могло быть в думе?

Занятие 6. Пропорции и проценты

6.1. Первый дракон тоньше второго на 75%. На сколько процентов второй дракон толще первого?

6.2. Саурон восстановился и выковал 93 новых кольца. Эльфам он дал a колец, гномам – b и людям – c так, что $a : b = 3 : 2$ и $b : c = 5 : 3$. Сколько колец у каждого народа?

6.3. Маленькое Привидение перед Хэллоуином убрало 20% паутины в своем За́мке, а за Хэллоуин количество паутины увеличилось на 20% по сравнению с началом праздника. На сколько процентов в Замке стало чище или грязнее?

6.4. Для приготовления завтрака Маленькая Ведьма вытащила из бочки треть лягушек, и уровень дождевой воды в бочке на четверть понизился. К обеду она вытащит оставшихся лягушек. На сколько относительно нового уровня понизится уровень воды?

6.5. Бильбо Бэггинс проник в пещеру дракона Смауга, что сильно встревожило хранителя золота. Но хоббит его успокоил, сказав: «У тебя 99% монет — золотые. Я буду брать только их. Когда я уйду, золотых останется 96% от всех монет». Сколько процентов монет унесёт Бильбо?

6.6. Граф Дракула и Кровавая Мэри вместе опорожнили бочку крови. Дракула выпил на 40% меньше графинов крови, чем Мэри, зато в его графине помещалось на 150% крови больше, чем в графине Мэри. Какую часть бочки выпил Граф?

6.7. Гарри, Рон и Гермиона решили конспектировать Книгу Зельеварения в отношении $8 : 6 : 5$. Один из них законспектировал на 250 страниц больше, и отношение стало $7 : 5 : 4$. Сколько страниц было в Книге Зельеварения?

6.8. На бал собрались привидения, причём дружелюбных 52% из них. Когда Маленькое Привидение с двумя товарищами вылетели в дымовую трубу, среди оставшихся оказалась половина дружелюбных. Сколько привидений изначально явились на бал?

6.9. На Хэллоуин собрались слететься ведьмы и вампиры. Ведьм должно было быть 25% от всей нечистой силы. Но Маленькую Ведьму не пустили родители, а вместо неё прибыл Граф Дракула, и тогда уже число ведьм составило только 20% от числа всех участников. Сколько ведьм и сколько вампиров прилетело на Лысую гору?

6.10. Тыква называется *вкусной*, если в ней более 50 семян. На телеге лежит куча тыкв. Что больше: процент вкусных тыкв в куче или процент семян, которые находятся во вкусных тыквах?

Занятие 7. Плюс пять – минус два

Краткие правила игры

- Проверяются только ответы к задачам.
- К задачам с несколькими возможными ответами нужно давать их все: неполный ответ считается неверным.
- Ответы на задачи сдаются последовательно.
- На сдачу ответа к каждой задаче даётся три попытки. Сдавать ответ на следующую задачу команда может только после того, как будет дан верный ответ или три неверных ответа на предыдущую задачу.
- За верный ответ даётся 5 очков, за неверный — штраф в 2 очка.
- Команда может пропустить задачу и перейти к следующей, но за это команда теряет 6 очков — как за три неудачные попытки сдать ответ.
- Подсчёт очков ведётся в таблице
- Игра заканчивается через полтора часа после начала или когда у всех команд заканчиваются задачи. Итог подводится по сумме очков.

Задачи

7.1. Сколько различных значений вы можете получить, расставляя скобки в выражении $1 + 2 \cdot 3 + 4$ (можно использовать сколько угодно пар скобок)?

7.2. Какая наибольшая сумма цифр может быть у суммы цифр трёхзначного числа?

7.3. Сколько есть трёхзначных чисел, у которых ровно две цифры равны?

7.4. В ряд выписана строка из цифр, причём любые две соседние цифры образуют число, которое делится на 17 или на 23. Первая цифра — 9. Какой может быть 999-я цифра?

7.5. Каждую сторону квадрата разделили на пять равных частей и через каждую точку деления провели по две прямые, параллельные диагоналям квадрата. На сколько частей проведённые прямые разбили квадрат?

7.6. Вычеркните из каждой клетки одну цифру так, чтобы получился *магический квадрат*: суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей должны быть одинаковы (всего 8 одинаковых сумм). Достаточно предложить один способ это сделать.

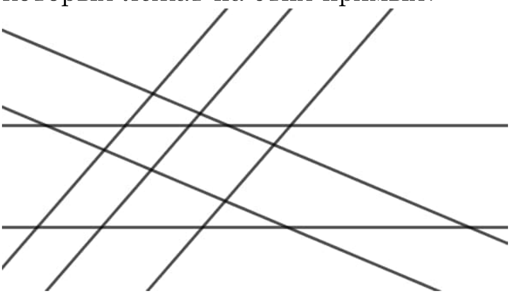
46	12	54
23	47	56
34	76	32

7.7. В круговом турнире по футболу каждая команда играет с каждой по одному разу. За победу в игре команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В одном таком турнире пятая часть команд не набрала ни одного очка. Сколько команд принимало участие в этом турнире?

7.8. На день рождения Диане подарили торт, и мама разрезала его на $a \times b \times c$ одинаковых кусочков: a кусков в высоту, b — в ширину, c — в длину. Друзья Дианы съели верхний слой торта, передний, задний и оба слоя с боков торта, а оставшиеся куски торта разбросали по столу. В итоге на столе осталось 4 куска торта. Сколько кусков торта могли съесть друзья Дианы?

7.9. Строки и столбцы таблицы 10×10 пронумеровали числами от 1 до 10 и в каждой клетке записали число a^b, где a — номер строки этой клетки, b — номер столбца. Сколько получилось клеток, в которых записаны *точные квадраты* (то есть квадраты натуральных чисел)?

7.10. На рисунке изображено 7 прямых, из которых две пары параллельных и одна тройка параллельных. Сколько есть треугольников, все стороны которых лежат на этих прямых?



7.11. Сколькими способами можно заменить все звёздочки на рисунке цифрами (не обязательно одинаковыми) так, чтобы получился верный пример на умножение?

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & 0 & * & * & * & * & * \\
\times & & & & & & & * \\
\hline
 & * & * & * & * & * & 1 & 3
\end{array}$$

7.12. В ряд лежат 30 кучек орехов. В каждых трёх кучках, лежащих подряд, в сумме девять орехов. Сколько всего орехов может быть в кучках с нечётным количеством орехов?

7.13. На гранях кубика расставлены натуральные числа от 1 до 6 по одному разу. Назовём вершину *троечницей*, если в ней сходятся три грани, сумма чисел на которых кратна 3. Сколько вершин-троечниц может быть у кубика?

Занятие 8. Среднее арифметическое

Среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$— это частное от деления их суммы на их количество: $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) : n$.

8.1. Найдите среднее арифметическое чисел: **а)** 11, 12, 13, ... , 29, 30; **б)** -19, -18, -17, ... , -3, -2, -1, 1, 2, ..., 19, 20; **в)** $251, 252, 253, \ldots, 499, 500$.

8.2. В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Средний рост девочек — 140 см, а мальчиков — 149 см. Найдите средний рост всех учеников в классе.

8.3. Средний возраст 11 футболистов команды — 22 года. Во время игры один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет ушедшему с поля?

8.4. Тринадцать индюшат клевали зерно. Первый индюшонок склевал 40 зёрен; второй — 60, а каждый следующий — среднее число зёрен, склёванных всеми предыдущими. Сколько зёрен склевал тринадцатый индюшонок?

8.5. В классе 25 учеников. Контрольную назовём *лёгкой*, если средний балл оценок за эту контрольную не меньше 4. За четыре проведённые в первой четверти контрольные были получены 40 пятёрок, 30 четвёрок, 20 троек и 10 двоек. Докажите, что по крайней мере одна из контрольных была лёгкой.

8.6. Одного из учеников 7«А» класса перевели в 7«Б», отчего средний рост учеников в обоих классах увеличился. Могло ли так быть?

8.7. Заказ по изготовлению приборов выполняла бригада в составе бригадира и девяти молодых рабочих. В течение дня каждый из рабочих смонтировал по 15 приборов, а бригадир — на 9 приборов больше, чем в среднем каждый из десяти членов бригады. Сколько всего приборов смонтировала бригада за один день?

8.8. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8.9. За контрольную можно получить одну из оценок: 2, 3, 4 или 5. Оценка за четверть равна среднему арифметическому **а)** восьми; **б)** девяти оценок за контрольные работы, округлённому до ближайшего целого числа по правилам округления (например, 2,5 округляется до 3). За четверть у Васи выходит оценка 3. Вася утверждает, что сможет переписать три контрольные так, чтобы получить за четверть оценку 5. Может ли это быть правдой?

8.10. Коля и Вася за май получили по 20 оценок. Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася пятёрок. Средний балл за май у них одинаковый. Сколько двоек получил Коля за май?

Занятие 9. Подсчёты и измерения

9.1. На прямой отметили **а)** 4 точки; **б)** n точек. Сколько получилось отрезков с концами в этих точках?

9.2. На одной прямой выбраны четыре точки A, B, C, D. Известно, что $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Найдите AD.

9.3. На плоскости отметили **а)** четыре точки; **б)** пять точек и через каждые две из них провели прямую. Сколько всего могло получиться прямых?

9.4. Сколько точек пересечения могут иметь пять прямых, каждые две из которых пересекаются?

9.5. На линейке есть деления 0, 13 и 17 см. Постройте отрезок длиной:
а) 3 см; **б)** 1 см; **в)** 9 см.

9.6. Отрезок длины a разделён некоторой точкой на две части (не обязательно равные). Найдите расстояние между серединами этих частей.

9.7. На прямой отмечены **а)** три точки; **б)** четыре точки. Могут ли середины двух отрезков с концами в этих точках совпадать?
в) На прямой отмечены пять точек. Могут ли середины трёх отрезков с концами в этих точках совпадать?

9.8. В деревне A живут 50 школьников, а в деревне B живут 100 школьников. Расстояние между деревнями равно 3 км. В какой точке дороги из A в B нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

9.9. Даны точки A и B. Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки A:
а) вдвое больше, чем до точки B; **б)** втрое меньше, чем до точки B?
в) Для каждой точки M, лежащей на прямой AB и не совпадающей с точкой B, вычислим отношение длин отрезков $AM : BM$. Где расположены точки, для которых это отношение больше 2?

9.10. На прямой отметили точки A, B, C, D в указанном порядке. Сумма длин всех (прямо всех-всех!) отрезков с концами в отмеченных точках равна 10. Найдите AD, если $BC = 2$.

9.11. На прямой отмечены 10 точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$, причём длина отрезка A_1A_{10} равна 1, а точки $A_2, A_3, \ldots, A_9$ лежат на этом отрезке. Докажите, что сумма всех попарных расстояний между отмеченными точками больше 8 см.

Занятие 10. Простые и составные

10.1. Простыми или составными являются числа:
а) 101; **б)** 177; **в)** 217; **г)** 463; **д)** 899; **е)** 8281? Ответы обоснуйте!

10.2. В магическом квадрате суммы цифр в каждой строке, в каждом столбце и на обеих диагоналях равны. Можно ли составить магический квадрат 5×5 из первых 25 простых чисел?

10.3. При каких натуральных n число $n^2 + 4n$ является простым?

10.4. Если в выражение $n^2 + n + 41$ подставлять $n = 1, 2, 3, 4, 5$, получатся простые числа $43, 47, 53, 61, 71$. Верно ли, что при подстановке в это выражение любого натурального числа n получится простое число?

10.5. **а)** Приведите пример трёх чисел, не делящихся друг на друга и таких, что произведение любых двух из них делится на третье.
б) Тот же вопрос для чисел, больших ста.

10.6. В ряд выписаны в порядке возрастания все простые числа. Может ли сумма шести подряд идущих чисел в этом ряду равняться сумме пяти подряд идущих чисел в этом ряду? (Наборы чисел могут пересекаться.)

10.7. Назовём число *примарным*, если оно является натуральной степенью простого числа (например, 7^1 или 13^4). Найдите самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.

10.8. Существует ли 41 подряд идущее составное натуральное число?

10.9. Докажите, что при всех натуральных значениях $n > 2$ числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ не могут быть простыми одновременно.

10.10. Назовём число *упрощённым*, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных чисел могут оказаться упрощёнными?

10.11. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, и сумма каждых двух его цифр является составным числом.

10.12. Петя утверждает, что он может написать четыре различных двузначных числа, разность любых двух из которых — простое число, а Коля утверждает, что он может написать пять таких чисел. Объясните, кто из них прав, а кто нет, и почему.

11.1. В компании из 8 человек каждый назвал число своих друзей в этой компании. Мог ли быть назван такой набор чисел:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; **б)** 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; **в)** 6, 6, 6, 3, 3, 3, 1, 1?

11.2. В стране Карабасии живут карабасы и барабасы. Каждый карабас дружит с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас дружит с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше — карабасов или барабасов?

11.3. **а)** Может ли быть, что в компании из 10 девочек и 9 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? **б)** А если девочек 11, а мальчиков 10?

11.4. В классе 25 учеников. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

11.5. Докажите, что в любой группе из 9 человек найдутся трое, знакомые между собой, или четверо, не знакомые между собой.

11.6. В классе 18 учеников. Каждый из них дружит не менее чем с 12 одноклассниками. Докажите, что среди учеников этого класса найдутся четверо, имеющие одинаковое число друзей.

11.7. В отряде 8 класса 47 человек. Известно, что среди любых четверых найдётся хотя бы один человек, знакомый с тремя остальными. Сколько человек могут знать всех в отряде?

11.8. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

11.9. В классе 27 учеников. У всех учеников класса, кроме Кости, в этом классе различное число друзей. А сколько друзей в классе у самого Кости?

11.10. Можно ли подобрать компанию, в которой у каждого было бы ровно **а)** пять; **б)** шесть друзей, а у каждых двух — ровно два общих друга?

12.1. Запишите формулы n-го члена последовательности и найдите её 43-й член в каждом из следующих случаев: **а)** натуральные числа, кратные четырём, записанные в порядке возрастания; **б)** целые отрицательные числа, записанные в порядке убывания; **в)** квадраты целых неотрицательных чисел, записанные в порядке возрастания; **г)** $5, 11, 17, 23, 29, \ldots$; **д)** $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

12.2. В строку записаны 10 чисел, причём сумма любых трёх чисел подряд равна 7, а сумма всех десяти равна 21. Найдите седьмое число в строке.

12.3. Обозначим через $\Pi(n)$ произведение цифр числа n. Рассмотрим последовательность $\Pi(2021), \Pi(2022), \Pi(2023), \ldots$. Какое наибольшее количество подряд идущих членов этой последовательности могут оказаться последовательными натуральными числами?

12.4. На доске выписаны в ряд 2022 числа. Первое из них равно 7, а каждое следующее равно сумме цифр квадрата предыдущего числа, увеличенной на 1. Какое число стоит на последнем месте?

12.5. Из последовательности натуральных чисел вычеркнули: **а)** все квадраты натуральных чисел; **б)** все квадраты и все кубы натуральных чисел. Найдите 1000-й член полученной последовательности в каждом случае.

12.6. Все натуральные числа от 1 до 2021 записали в следующем порядке: сначала записали в порядке возрастания все числа с суммой цифр 1, затем — с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом — с суммой цифр 3 (также в порядке возрастания) и так далее. На каком месте оказалось число 1997?

12.7. Натуральные числа, делящиеся на 9, записаны в порядке возрастания: $9, 18, 27, 36, \ldots$ Под каждым членом этой последовательности записана сумма его цифр. **а)** На каком месте во второй последовательности впервые появится число 81? **б)** Что во второй последовательности встретится раньше: первый раз число 36 или десять раз подряд число 27?

12.8. Дана последовательность $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$
а) На каком месте последний раз стоит число 201?
б) Какое число стоит на 2021-м месте?

12.9. **а)** Числа от 1 до N выписали подряд без пробелов. Получилось 2016-значное число $1234567891011\ldots$ Найдите N.
б) Натуральные числа $1, 2, 3, \ldots$ выписывали подряд без пробелов, пока в полученной строке $1234567891011121314\ldots$ не встретилась четвёрка цифр $\ldots 2016 \ldots$ На каком месте от начала строки стоит цифра 6 из этой четвёрки?

Занятие 13. Турниры

13.1. В однокруговом турнире четырёх команд с подсчётом очков по системе $2 - 1 - 0$ команда A набрала 5 очков, B — 2 очка, C — 1 очко. Какое место заняла команда D?

13.2. В круговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. Будем говорить, что команда А *сильнее* команды В, если либо команда А выиграла у команды В, либо существует такая команда С, что команда А выиграла у команды С, а команда С выиграла у команды В. Докажите, что победитель турнира сильнее остальных команд.

13.3. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть единственная команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

13.4. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

13.5. В шахматном турнире в школе участвовало 20 участников. Каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира оказалось, что ровно один ученик набрал 9,5 очка и он занял девятнадцатое место. Мог ли победитель турнира обойти игрока, занявшего второе место, на 1 очко?

13.6. Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько партий больше он выиграл, чем проиграл?

13.7. Во время первенства класса по шахматам двое участников, сыграв равное количество партий, заболели и выбыли из турнира, а остальные участники доиграли турнир до конца. Играли ли выбывшие участники между собой, если всего было сыграно 23 партии? (Турнир проводился по круговой системе: каждый играл с каждым одну партию.)

13.8. Турнир по боксу проходил по олимпийской системе: в каждом круге проигравшие выбывают. Сколько боксеров участвовало в турнире, если к концу турнира 32 человека выиграли больше боёв, чем проиграли?

13.9. Пять футбольных команд сыграли турнир в один круг. После окончания турнира одну из команд дисквалифицировали, а все очки, набранные в матчах с ней, аннулировали. Могла ли команда, сначала занимавшая чистое первое место, стать абсолютно последней?

14.1. **а)** Докажите, что если один из углов равнобедренного треугольника равен $60°$, то этот треугольник равносторонний. **б)** Один из углов равнобедренного треугольника равен $45°$. Будет ли этот треугольник прямоугольным?

14.2. Один из углов равнобедренного треугольника равен $24°$. Найдите: **а)** остальные его углы; **б)** угол между биссектрисами углов при основании треугольника.

14.3. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC. Известно, что $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что $BM = BN$.

14.4. Равнобедренный треугольник ABC таков, что его можно разбить на два меньших равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны углы треугольника ABC? Рассмотрите все возможные случаи!

14.5. Точка D лежит на стороне AC правильного треугольника ABC, причём $AD > DC$. Построили перпендикуляры: $DF \perp BC$ $(F \in BC)$, $FK \perp AB$ $(K \in AB)$, $KE \perp AC$ $(E \in AC)$. Пусть P — точка пересечения прямых KE и DF. Известно, что $PD = DF$. Найдите $\angle ADK$.

14.6. В треугольнике ABC $AB = BC$. На прямой AC выбрана такая точка $D \neq C$, что $AD = AC$. Перпендикуляр к прямой DC в точке A пересекает отрезок BD в точке E. Докажите, что $\angle DBA = \angle BCE$.

14.7. Даны правильные треугольники ABC и ADF. Известно, что $D \in BC$, а отрезки DF и AB пересекаются. Кроме того, на стороне BC отмечена такая точка E, что $BD = EC$. Докажите, что $AB \perp EF$.

14.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ («выпуклый» = «диагонали пересекаются внутри»). Известно, что $AD = BD = CD$, $\angle CBD = \angle BAC$ и $\angle ADB = \angle ACD$. Найдите углы четырёхугольника.

14.9. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана такая точка X, что треугольник BCX правильный. Точка Y такова, что треугольник CDY правильный и внутри него лежит точка X. Докажите, что треугольник AXY также правильный.

Занятие 15. Выпрямляем сумму

15.1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяли такие точки K и M соответственно, что $\angle MAK = 45°$. Докажите, что $BK + DM = MK$.

15.2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Из вершины A проведена высота AD. В треугольнике ABD проведена биссектриса BE. Докажите, что $AB + AE = BC$.

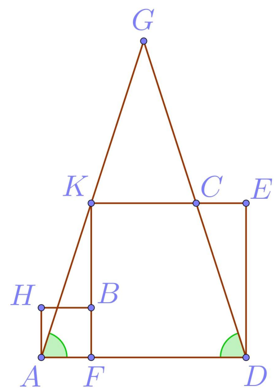
15.3. BE — биссектриса треугольника ABC. Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что один из углов треугольника вдвое больше другого.

15.4. Точки D, E и F выбраны на сторонах AC, AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) так, что $DE = DF$ и при этом $AE + FC = AC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle FDE$

15.5. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D, а на биссектрисе угла ABD отмечена такая точка E, что $\angle EAC = 60°$. (Точки B и E лежат по разные стороны от прямой AC.) Докажите, что $BD = CD + AE$.

16.1. Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трёх чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. **а)** Предложите способ, как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался. **б)** Найдите все возможные способы это сделать и докажите, что других нет.

16.2. Фокусник задумал два натуральных числа и сообщил Симе их сумму, а Прову — их произведение. Зная, что произведение равно 2280, Пров смог отгадать задуманные числа только после того, как Сима сообщила, что сумма у неё нечётна и двузначна. Так какие числа задумал фокусник?



16.3. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

16.4. Максим сложил на столе из 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников (не накладывая их друг на друга и прикладывая их друг к другу только целыми сторонами) многоугольник. Мог ли периметр этого многоугольника оказаться равным 16 см, если стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см?

16.5. На столе лежат 6 яблок (не обязательно одинакового веса). Таня разложила их по 3 на две чашки весов, и весы остались в равновесии. А Саша разложил те же яблоки по-другому: 2 яблока на одну чашку и 4 на другую, и весы опять остались в равновесии. Докажите, что можно положить на одну чашку весов одно яблоко, а на другую два так, что весы останутся в равновесии.

16.6. На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов — 20 круглых и 8 кубических арбузов. Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Один вид животных ест и круглые, и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид привередлив и какие арбузы он предпочитает.

16.7. Пять друзей подошли к реке и обнаружили на берегу лодку, в которой могут поместиться все пятеро. Они решили покататься на лодке. Каждый раз с одного берега на другой переправляется компания из одного или нескольких человек. Друзья хотят организовать катание так, чтобы каждая возможная компания переправилась ровно один раз. Получится ли у них это сделать?

17.1. Колода карт для игры «Имаджинариум» состоит из 98 различных карт. Сколько существует способов: **а)** выложить на столе перед собой в ряд 6 карт; **б)** получить 6 карт на руки?

17.2. **а)** В высшей лиге чемпионата по квиддичу среди 16 команд разыгрываются золотая, серебряная и бронзовая медали. Сколькими способами могут определиться три медалиста? **б)** На том же чемпионате три команды, занявшие последние места, должны перейти в первую лигу. Сколькими способами могут определиться эти три аутсайдера?

17.3. Пять друзей сняли в гостинице два номера: двухместный и трёхместный. Сколькими способами можно выбрать тех, кто поселится: **а)** в двухместном номере; **б)** в трёхместном номере?

17.4. На математический кружок ходят 10 человек. Сколько можно из них составить разных команд для участия: **а)** в математической регате (4 человека); **б)** в математическом бою (6 человек)?

17.5. Сколько десятизначных чисел можно составить: **а)** из четырёх единиц и шести двоек; **б)** из четырёх единиц и шести нулей? **в)** Выпишите в порядке возрастания первые пять чисел в каждом из предыдущих пунктов.

17.6. Сколько способов выбрать: **а)** двух депутатов из пяти кандидатов; **б)** трёх депутатов из пяти кандидатов; **в)** трёх депутатов из восьми кандидатов; **г)** одного директора, двух заместителей, трёх менеджеров по персоналу и четырёх менеджеров по клинингу из 10 претендентов? Порядок выбора неважен.

17.7. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры: **а)** 11222; **б)** 11122; **в)** 55577777; **г)** 1223334444? Как эта задача связана с задачей 17.6?

17.8. Из 20 прямых каждые две пересеклись, но никакие три не пересеклись в одной точке. Сколько получилось: **а)** точек пересечения; **б)** треугольников?

17.9. У Алины 6 подруг, и каждое воскресенье она идёт в кино с какими-нибудь тремя из них. **а)** Сколько разных компаний может собрать Алина для похода в кино? **б)** Какое наибольшее число фильмов может Алина посмореть с подругами в кино так, чтобы компания подруг ни разу не повторилась (на каждых двух фильмах хотя бы одна подруга в компании отличалась)? **в)** Сколько у Алины способов выбрать компанию на каждое из воскресений марта так, чтобы компании ни разу не повторились?

17.10. **а)** Сколькими способами можно разделить 12 человек на две команды по 6 человек? **б)** А если Петя с Васей должны оказаться в разных командах? **в)** Сколько есть способов разделить 18 человек на три команды по 6 человек?

18.1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник шириной 200 и высотой 100 клеток. Его закрашивают по клеткам, начав с левой верхней и идя по спирали (дойдя до края или уже закрашенной части, поворачивают направо). Какая клетка будет закрашена последней? (Укажите номер её строки и столбца.)

18.2. В коробке лежат 2021 белый и 2022 чёрных шара. Наугад вытаскиваются два шара. Если они одного цвета, то их выкидывают и кладут в коробку чёрный шар, а если разного — выкидывают чёрный, а белый кладут обратно. Так делают до тех пор, пока в коробке не останется один шар. Какого он цвета?

18.3. В волшебном лесу жили 56 зайцев, 35 лис, 24 волка и 3 медведя. Если лиса съест зайца, то превратится в волка, а если волк съест зайца, то превратится в медведя. Через год в лесу осталось 3 зайца, а медведей стало 33. А сколько лис?

18.4. На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

18.5. В колонию из 200 бактерий попадает вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, а каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В каждую следующую минуту каждый имеющийся вирус уничтожает по одной бактерии, и затем каждый из вирусов и каждая из оставшихся бактерий снова делятся пополам. Будет ли эта колония жить бесконечно долго или погибнет (если да, то через какое время)?

18.6. Десять гномов вместе выпивают ведро молока за минуту. Каждый гном пьет молоко со своей постоянной скоростью. Докажите, что если разлить молоко поровну в 10 бутылок, то гномы тоже смогут выпить его за минуту. (Из каждой бутылки в каждый момент может пить только один гном, но разрешается любое число раз обмениваться бутылками, обмен происходит мгновенно).

18.7. Круг разбит на 25 секторов, пронумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 25; в одном из них сидит кузнечик. Он прыгает по кругу, каждым прыжком перемещаясь по часовой стрелке на число секторов, равное номеру текущего сектора. Докажите, что в какой-то сектор кузнечик не сможет попасть.

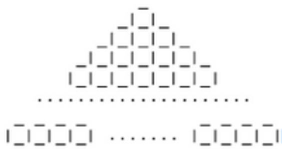
18.8. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовём пару соседних чисел *плохой*, если либо они одной чётности и левое больше правого, либо они разной чётности и левое меньше правого. Каждую минуту числа одной из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

19.1. На бесконечной тропинке через каждый метр нарисована метка. На одной из них сидит Кузнечик, который умеет прыгать влево на 7 м, а вправо — на 4 м. **а)** Как Кузнечику перепрыгнуть на 1 м правее? **б)** А на 1 м левее? **в)** Докажите, что он сможет допрыгать до любой метки.

19.2. В мешке 64 кг гвоздей. Как при помощи чашечных весов без гирь отвесить: **а)** 32 кг гвоздей; **б)** 8 кг гвоздей; **в)** 23 кг гвоздей; **г)** n кг гвоздей (n — любое целое число от 1 до 64)?

19.3. На бесконечном клетчатом поле стоит фигура Снежинка. Снежинка умеет ходить на 5 клеток по горизонтали или вертикали (в четырёх направлениях) и на 2 клетки по диагонали (ещё в четырёх направлениях). Может ли она за несколько ходов попасть в любую клетку?

19.4. Найдите значение суммы: **а)** $1 + 3 + 5 + 7 + 9$; **б)** $1+3+5+\ldots+19$; **в)** $1+3+5+\ldots+(2n-1)$. Попробуйте обосновать ответ в пункте в) двумя способами: арифметическим и геометрическим. Вам поможет пирамидка на рисунке справа.



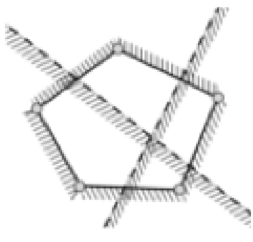
19.5. Филя рвёт каждый попадающий ему в руки кусок бумаги на 4 части, а Степашка — на 8. Докажите, что объединёнными усилиями они могут разорвать газету на любое число частей, начиная с 13.

19.6. Вычислите сумму степеней двойки:
а) $1 + 2 + 4 + 8 + 16$; **б)** $1 + 2 + 4 + \ldots + 128$; **в)** $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$.

19.7. Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали одну клетку (но неизвестно, какую именно). Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

19.8. Карточки с номерами от 1 до 2022 выложены в ряд в произвольном порядке. Одна из карточек — красная, а остальные — белые. За один шаг можно поменять красную карточку местами с любой другой. Как за несколько шагов расположить карточки в порядке возрастания номеров?

19.9. У *бородатого многоугольника* снаружи растёт щетина. Его пересекают несколько *бородатых прямых*, у каждой из которых с одной стороны тоже растёт щетина (см. рис. справа). Они делят многоугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — бородатая снаружи.



Занятие 20. Прямоугольно-треугольное

20.1. Отрезки AM и BH — медиана и высота остроугольного треугольника ABC соответственно. Известно, что $AH = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найдите сторону BC.

20.2. В треугольнике DEF проведена медиана DK. Найдите углы треугольника, если $\angle KDE = 70^\circ$, $\angle DKF = 140^\circ$.

20.3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены высота CH, биссектриса CL и медиана CM. Докажите, что CL — биссектриса угла MCH.

20.4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. На стороне AC взята такая точка K, что $\angle CBK = \angle CAB$. Докажите, что отрезок BK делится отрезком CH пополам.

20.5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD из вершины прямого угла. На сторонах AC и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $CE = BF$. Докажите, что треугольник DEF прямоугольный и равнобедренный.

20.6. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

20.7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD. Перпендикуляр к BD, проведённый через точку D, пересекает прямую BC в точке F. Найдите DC, если $BF = a$.

20.8. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BD = BC$, а на катете BC — такая точка E, что $DE = BE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

20.9. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол MKN прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

20.10. Можно ли разрезать равносторонний треугольник на три части и сложить из них прямоугольный треугольник?

Занятие 21. Ещё половина гипотенузы

21.1. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведённая из вершины прямого угла.

21.2. В прямоугольном треугольнике ABC точка K — середина гипотенузы AB, а точка M делит катет AC в отношении $2:1$ (считая от вершины A). Найдите острые углы треугольника ABC, если отрезок MK перпендикулярен AB.

21.3. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15°. Найдите гипотенузу.

21.4. Прямые, содержащие высоты BP и CQ треугольника ABC, пересекаются в точке H. Чему может быть равен угол ABC, если известно, что $BH = AC$?

21.5. Высота BN треугольника ABC в два раза меньше стороны AC, а один из углов, прилежащих к AC, равен 75°. Докажите, что ABC — равнобедренный треугольник.

Занятие 22. Не бойся формул!

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

22.1. Вычислите: **а)** 81^2; **б)** 79^2; **в)** $0{,}67 \cdot 0{,}73$; **г)** $10\frac{2}{7} \cdot 9\frac{5}{7}$; **д)** $\left(4\frac{5}{8}\right)^2$; **е)** 202^3.

22.2. Про числа a и b известно, что $a + b = 7$, $a \cdot b = 2$.
Найдите: **а)** $(a+b)^2$; **б)** $a^2 + b^2$; **в)** $(a-b)^2$; **г)** $a^2 - ab + b^2$; **д)** $a^3 + b^3$.

22.3. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

а) $(6a^5 + *)^2 = * + * + 49b^4$

б) $(5b^2 - *)^2 = * - 30a^2b^3 + *$

в) $(* - 4)^3 = y^3 - * + * - 64$

г) $(4a^2 + *)^3 = * + * + 300a^2m^2 + *$

22.4. Существуют ли такие целые числа x, y и z, для которых выполняется равенство $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 20212022$?

22.5. Найдите значение произведения

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{400}\right).$$

22.6. **а)** Выведите формулу для квадрата суммы трёх чисел: $(a+b+c)^2 = ?$
б) Известно, что $a+b+c = 5$ и $ab+bc+ac = 5$. Чему может равняться $a^2+b^2+c^2$?
в) Известно, что $x + y + z = 0$. Докажите, что $xy + yz + zx \leqslant 0$.

22.7. Докажите, что если $a = b + 1$, то

$$(a+b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) \cdot \ldots \cdot (a^{32} + b^{32}) = a^{64} - b^{64}.$$

22.8. Числа a, b и c таковы, что выражения $\dfrac{a+b}{c}$, $\dfrac{b+c}{a}$ и $\dfrac{c+a}{b}$ принимают одинаковое значение. Какое?

22.9. Известно, что каждое из чисел x и y можно представить в виде суммы квадратов каких-то двух целых чисел. Докажите, что число xy также является суммой квадратов каких-то двух целых чисел.

22.10. Незнайка придумал *фантастическое умножение* $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам *нуликативности* $x \circledast x = 0$ и *тилимилитивности* $x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) + z$. Помогите Знайке вычислить $1755 \circledast 2022$.

Занятие 23. Остатки сладки

Во всех задачах этого занятия все упомянутые числа предполагаются целыми, если не оговорено иное. Деление выполняется либо нацело, либо с остатком.

23.1. Верны ли следующие утверждения и почему:
а) существует число a, кратное 3, дающее при делении на 12 остаток 2; **б)** если a делится на 8 с остатком 3, то a делится на 4 с остатком 3;
в) если a делится на 4 с остатком 3, то a делится на 8 с остатком 3;
г) если a делится на 15 с остатком 7, то a делится на 5 с остатком 3;
д) если a делится на 15 с остатком 3, то a делится на 9 без остатка?

23.2. Составьте таблицу всех возможных остатков квадратов и кубов целых чисел при делении на **а)** 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 6; **д)** 7; **е)** 8; **ж)** 9.

23.3. Докажите, что:
а) $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n;
б) $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n;
в) $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n;
г) $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n.

23.4. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 может быть равен либо единице, либо простому числу.

23.5. Известно, что a, b, c — натуральные числа, причём число $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

23.6. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

23.7. Докажите, что если $a^2 + b^2$ делится на 7, то a и b делятся на 7.

23.8. Докажите, что среди любых пяти целых чисел найдутся три числа, сумма которых делится на 3.

23.9. Докажите, что число $a^3 + b^3 + 4$ не является точным кубом (то есть кубом целого числа) ни при каких целых a и b.

Занятие 24. Игра "Математическая драка"

Правила игры «математическая драка»

1. Математическая драка — это командная игра-соревнование по решению задач. Играется командами по 3-4 человека.
2. Каждая команда размещается в отдельной виртуальной комнате.
3. В начале игры команда получает список задач, которые можно решать в произвольном порядке, и первоначальный капитал в 10 тугриков.
4. Проверяются только ответы к задачам. К задачам с несколькими возможными ответами нужно давать их все: неполный ответ считается неверным.
5. Ответы один из членов команды отправляет на проверку преподавателям личным сообщением, указывая в сообщении название команды, номер задачи и собственно ответ.
6. Первоначальная цена каждой задачи — 3 тугрика. Если команда дала неверный ответ, из ее капитала вычитается 1 тугрик, а текущая цена соответствующей задачи увеличивается на 1 тугрик. Команда, которая первой верно решила задачу, увеличивает свой капитал на цену задачи, а прием ответов по этой задаче прекращается.
7. Текущие цены задач и количество тугриков на счетах команд отмечаются в таблице.
8. Когда какая-либо задача решена одной из команд, соответствующий столбец таблицы закрашивается красным цветом; жюри также объявляет об этом в общем чате аудитории.
9. Если у команды закончились тугрики, она НЕ выбывает из драки, а уходит в минус.
10. Драка заканчивается, если решены все задачи или истекло отведенное на нее время (полтора часа от начала).
11. Победителем считается команда, у которой на момент окончания драки на счету больше всего тугриков (ну или кто меньше уйдет в минус :)). При равном числе тугриков у нескольких команд победителем считается та, которая дала больше верных ответов.

1. Глеб написал на доске обыкновенную дробь, а Гриша посчитал сумму её числителя и знаменателя. Найдите наименьшее возможное натуральное значение этой дроби, если у Гриши получилось число 2011.

2. Маша пробежала 1 км со средней скоростью 4 м/с. С какой средней скоростью пробежал эту дистанцию Вася, если, стартовав на 25 секунд позже Маши, он финишировал на 25 секунд раньше?

3. Разделите число 80 на две части так, чтобы одна часть составляла 60% от другой части.

4. Сколько существует трёхзначных чисел, у которых сумма цифр больше произведения цифр?

5. Четыре мецената пожертвовали театру 132 тысячи рублей. При этом второй пожертвовал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвёртый — вчетверо больше третьего. Сколько пожертвовал четвёртый?

6. Незнайка лжёт по понедельникам, вторникам и пятницам, а в остальные дни недели говорит правду. В какие дни недели Незнайка может сказать: „Я лгал позавчера и буду лгать послезавтра”?

7. На шахматной доске стоят ладьи так, что каждая из них бьёт N ладей. При каких целых N это возможно? (Ладья бьёт в каждом направлении только ближайшую ладью.)

8. Маша выписывает последовательно на доску по возрастанию все числа, в которых число четных цифр равно числу нечетных цифр. Какое число выпишет Маша 46-м?

9. Три поросенка хранят в жестяной банке красные, желтые и зеленые леденцы. Какое наименьшее число леденцов надо взять наугад из банки так, чтобы каждому поросенку можно было дать по 5 леденцов одного цвета? (У разных поросят леденцы могут быть и разными.)

10. Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число задумал Вася (перечислите все возможные варианты)?

11. Сумма четырёхзначного натурального числа с его суммой цифр равна 2018. Чему равно само число (необходимо найти все возможные варианты)?

12. Сколько на шахматной доске имеется всевозможных прямоугольников, состоящих из четырёх клеток?

13. На какое наибольшее количество прямоугольников можно разрезать (без остатка) по линиям сетки клетчатый квадрат 7×7 так, чтобы среди них не оказалось одинаковых?

14. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили Ауди и БМВ. Оказалось, что как в 17:00, так и в 18:00 БМВ находился в два раза дальше от перекрестка, чем Ауди. В какое время Ауди мог проехать перекресток? Укажите все возможные варианты.

15. В деревне Большие Топоры живет 100 детей, а в деревне Средние Топоры — 60, между деревнями проложена прямая дорога длиной 6 км. Посередине между Большими Топорами и Средними расположена деревня Малые Топоры, в которой живет 20 детей. В каком месте нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, которые должны будут каждый день преодолевать школьники, было наименьшим? (В ответе укажите расстояние от школы до каждой из деревень.)

16. На плоскости нарисовали три прямые. Прямые пересеклись в трёх точках A, B, C. Из образовавшихся углов выбрали три: один с вершиной в точке A, второй — с вершиной в точке B и третий — с вершиной в точке C. Известно, что два из выбранных углов равны 1° и 2°. Чему может быть равен третий угол? Укажите все возможные варианты.

17. Каждый из 12 человек — рыцарь, всегда говорящий правду, или всегда лгущий лжец. Один из них сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1», второй: «Число лжецов среди нас делится на 2», ..., 12-ый: «Число лжецов среди нас делится на 12». Сколько среди них может быть рыцарей? Укажите все возможные варианты.

18. Бусы — это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать и переворачивать, они от этого не меняются. Сколько различных видов бус можно составить из 10 одинаковых красных бусин и двух одинаковых синих бусин?

19. В комнате дед, два отца, два сына и два внука (это дед, отцы, сыновья и внуки людей, находящихся в комнате). Сколько людей могло быть в комнате?

20. Найдите количество прямоугольников, составленных из клеток шахматной доски, которые содержат поле C4. (Одна клетка — это тоже прямоугольник.)