

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты

<u>Баллы</u>	<u>Задачи</u>
4	1. В пифагоровой таблице умножения выделили квадратную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета — черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках. Рассмотрите случаи, когда сторона рамки состоит из а) 3 клеток, б) 9 клеток, в) $2n+1$ клеток. (Пифагорова таблица умножения — это клетчатая таблица, в которой на пересечении m -й строки и n -го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).)
4	2. Фрекен Бок хочет выпить чаю с Малышом, Карлсоном и дядей Юлиусом. У нее есть а) 1000 кусочков; б) 1001 кусочек; в) 1002 кусочка; г) 1003 кусочка сахара. Сможет ли она разложить весь сахар по четырем чашкам так, чтобы количества кусочков сахара в них имели разные остатки при делении на 4? (Любая чашка может вместить весь сахар.)
4	3. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатали по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?
4	4. И Петя и Вася каждый день покупают, либо 1 яблоко, либо 1 грушу, причем Петя всегда покупает то, что Вася купил неделю назад, а Вася никогда не берет то, что Петя купил неделю назад. Какое наибольшее количество яблок мог купить Вася в сентябре?
4	5. По кругу посажены $2N$ деревьев. Между деревьями натянуто N веревок. К каждому дереву привязана ровно одна веревка. Известно, что по разные стороны от каждой веревки находится нечетное число деревьев. Докажите, что число N четно.

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты

<u>Баллы</u>	<u>Задачи</u>
4	1. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета — черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках. (Пифагорова таблица умножения — это клетчатая таблица, в которой на пересечении m -й строки и n -го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).)
4	2. Равнобокая трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам.
4	3. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатали по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?
4	4. В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки, и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык.
4	5. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты

БаллыЗадачи

1. Банкомат обменивает монеты: дублионы на пистолы и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон — $1/s$ пистолей, где s — не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

2

а) Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистолы, а затем обменяв полученные пистолы на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было вначале?

3

б) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD , равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BOC и DOA . Докажите, что

2

а) четырехугольник $ABCD$ — описанный;

3

б) четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей.

3. Полицейский участок расположен на прямой дороге, бесконечной в обе стороны. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали вдогонку полицейского на новой полицейской машине. Однако вот беда: полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в каком направлении вдоль дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?

5

4. Квадратная доска $n \times n$ разделена на n^2 прямоугольных клеток $n - 1$ горизонтальными и $n - 1$ вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все n клеток черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток доски не меньше общей площади белых.

5

5. 55 боксеров участвовали в турнире по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?

5

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты
- Баллы за пункты одной задачи суммируются

6-7 кл., базовый вариант 18 октября 2009 г.

<u>Баллы</u>	<u>Задачи</u>
1 2	1. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, запишите выражение, значение которого было бы равно 2009. Цифры в выражении могут стоять в произвольном порядке, в то же время целесообразно отдельное рассмотрение случаев: а) выражение может содержать многозначные числа; б) все цифры в выражении разделены каким-либо знаком.
3	2. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты не равны?
1 4	3. Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. а) Можно ли было так выбрать гири, чтобы весы оказались в равновесии (Придумайте пример или докажете, что такой выбор невозможен). б) Если такой выбор возможен, то докажете, что тогда на какой-нибудь чаше обязательно есть две гири с разностью масс в 20 г.
6	4. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
6	5. На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает к кругу снаружи картонные квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия: 1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга; 2) квадраты не перекрываются; 3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине. Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажете, что последний и первый квадрат тоже коснутся вершинами.
2 5	6. На кружок по информатике пришло 8 школьников. Каждый написал письмо по электронной почте каким-то четвертым из оставшихся. Учитель объявил, что любые два школьника смогли наверняка установить электронную переписку в том случае, если каждый из этой пары получил письмо от другого (почта в кружке ходит надежно). а) Какое наибольшее количество пар школьников могли установить переписку? б) Какое наименьшее количество пар школьников могли установить переписку?

8-9 кл., базовый вариант 18 октября 2009 г.

<u>Баллы</u>	<u>Задачи</u>
3	1. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты не равны?
4	2. Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть две гири с разностью масс в 20 г.
4	3. На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает К кругу снаружи картонные Квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия: 1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга;

2) квадраты не перекрываются;

3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине.

Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажите, что последний и первый квадрат тоже коснутся вершинами.

- 5 4. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
- 5 5. На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

10-11 кл., базовый вариант 18 октября 2009 г.

<u>Баллы</u>	<u>Задачи</u>
4	1. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
4	2. В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE . Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.
4	3. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d , что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?
4	4. На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади S . Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь S .
5	5. В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше десяти платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно раздать десяти компаниям так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;
- баллы за пункты одной задачи суммируются

6-7 кл., базовый вариант

11 октября 2015 г.

БаллыЗадачи

- 4 1. На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22 (каждое число ровно один раз). Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?
- 4 2. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?
- 5 3. Из одинаковых неравносторонних прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?
- 5 4. В однокруговом шахматном турнире участвовало 15 человек. Каждый из участников сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. За победу присуждается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очка. Могут ли четыре участника набрать в сумме больше очков, чем все остальные вместе?
- 5 5. В стране n городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и B перелет из A в B стоит столько же, сколько перелет из B в A . Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если
- 2 а) $n = 5, m = 4$;
- 2 б) $n = 5, m = 5$;
- 3 в) $n = 100, m = 99$?

8-9 кл., базовый вариант

11 октября 2015 г.

БаллыЗадачи

- 4 1. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?
- 4 2. Из одинаковых неравносторонних прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?
- 5 3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.
- 5 4. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB — точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.
- 5 5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и B перелет из A в B стоит столько же, сколько перелет из B в A . Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если:
- 3 а) $m = 99$;
- 3 б) $m = 100$?

10-11 кл., базовый вариант

11 октября 2015 г.

БаллыЗадачи

- 3 1. Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n , что pn делится на $p + n$?
- 4 2. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK — биссектриса в треугольнике ABD . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD .
- 4 3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.
- 4 4. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и B перелет из A в B стоит столько же, сколько перелет из B в A . Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если:
- 2 а) $m = 99$;
- 2 б) $m = 100$?
- 5 5. Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

- | | |
|--------------|---------------|
| Баллы | Задачи |
|--------------|---------------|
- 1 1. а) Есть 19 палочек с длинами 1,2,3,...,19. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?
 - 2 1,2,3,...,99, то тогда можно?
 - 2 2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:
 - 1 а) ровно в 5,5 раз;
 - 2 б) ровно в шесть раз;
 - 2 в) ровно в пять раз?
 - 4 3. В спортивно-оздоровительном лагере «Бригантина» есть три математика: Борис Валентинович, Леонид Иванович и Сергей Юрьевич. Каждый из них ежедневно получает некоторую постоянную плату за работу. Однажды главный бухгалтер пришел к директору лагеря Владимиру Александровичу и доложил, что на имеющееся средства можно в течение 24 дней выплачивать жалование Борису Валентиновичу и Сергею Юрьевичу, или 18 дней Борису Валентиновичу и Леониду Ивановичу, или 8 дней Леониду Ивановичу и Сергею Юрьевичу. Директор сразу же уволил главного бухгалтера, сказав, что он обманывает. Почему так поступил директор лагеря?
 - 5 4. На столе лежит правильный треугольник, сделанный из жести. Его разрешается катать по столу, переворачивая через любую сторону. Докажите, что если после нескольких таких операций треугольник вернулся на свое первоначальное место, то и все его вершины тоже вернуться на свои места.
 - 5 5. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка). За весь учебный год Андрей получил 20 оценок – по 5 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

- | | |
|--------------|---------------|
| Баллы | Задачи |
|--------------|---------------|
- 3 1. Есть 99 палочек с длинами 1,2,3,...,99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?
 - 2 2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:
 - 2 а) ровно в шесть раз;
 - 2 б) ровно в пять раз?
 - 5 3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC – точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.
 - 5 4. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка). За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?
 - 5 5. Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если:
 - 2 а) $N = 2$;
 - 3 б) N – любое натуральное число, большее 1.

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

- | | |
|--------------|---------------|
| Баллы | Задачи |
|--------------|---------------|
- 1 1. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя
 - 1 а) ровно в шесть раз;
 - 2 б) ровно в пять раз?
 - 4 2. Вершины треугольника обозначены буквами А, В, С по часовой стрелке. Треугольник последовательно поворачивают по часовой стрелке: сначала вокруг вершины А на угол, равный $\angle A$, потом — вокруг вершины В на угол, равный $\angle B$, и так далее по циклу (каждый раз поворот делают вокруг текущего положения очередной вершины). Докажите, что после шести поворотов треугольник займёт исходное положение.
 - 5 3. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася — все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)
 - 5 4. Даны N прямоугольных треугольников ($N > 1$). У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что все исходные треугольники подобны.
 - 5 5. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

6-7 кл.,**базовый вариант****13 октября 2013 г.**

<u>Бал- лы</u>	<u>Задачи</u>
2	1. Выразите единицу, используя все десять цифр и операции сложения, вычитания, умножения и деления.
1	2. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка.
3	а) Каково наибольшее возможное количество призёров?
3	б) Каково наименьшее возможное количество призёров?
4	3. Мальчик прошёл $\frac{3}{8}$ моста и услышал, что к мосту приближается автомобиль со скоростью 60 км/ч. Если мальчик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, если же он побежит вперёд, то автомобиль настигнет его в конце моста. С какой скоростью бежит мальчик?
5	4. Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b) . Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < (n, n+3)$. Найдите $(n, n+6)$.
2	5. а) Найдется ли шестизначное число, записанное шестью различными цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, такое, что после вычеркивания из него любых трех цифр получится составное трехзначное число?
4	б) Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

8-9 кл.,**базовый вариант****13 октября 2013 г.**

<u>Бал- лы</u>	<u>Задачи</u>
3	1. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?
4	2. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?
4	3. Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b) . Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \dots < (n, n+35)$. Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.
5	4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$. Докажите, что $KL = BC$.
6	5. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются "одновременно", то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

БалЗадачилы

- 3 1. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?
- 4 2. На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника: YBA и ZAC – во внешнюю сторону, а XBC – внутрь (соответственные вершины перечисляются в одинаковом порядке). Докажите, что $AUXZ$ – параллелограмм.
- 4 3. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a, b будем обозначать $[a, b]$. Пусть натуральное число n таково, что $[n, n+1] > [n, n+2] > \dots > [n, n+35]$.
Докажите, что $[n, n+35] > [n, n+36]$.
- 5 4. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются “одновременно”, то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)
- 6 5 Космический аппарат сел на неподвижный астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат проехал по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там точно определили трехмерную траекторию аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ездил аппарат?

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

Бал-
лы

Задачи

- 3 1. На концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам и в середине каждой из них тоже пишется единица (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в середине каждой из них снова пишется единица (второй шаг). Такая операция продлевается 2012 раз. Найдите сумму всех записанных чисел.
- 4 2. В теннисной секции тренируются девять юных спортсменов разной силы. Тренер решил провести тренировочные командные соревнования. В каждую команду включается по три спортсмена, во встрече между двумя командами каждый игрок любой команды играет ровно одну игру с одним из игроков другой команды. Предположим, что более сильный спортсмен всегда побеждает более слабого. Сможет ли тренер так распределить теннисистов по командам, что первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, третья – над первой?
- 2 3. а) На столе стоят 8 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые 7 стаканов. Можно ли добиться, чтобы все стаканы стояли правильно?
1 б) Та же задача, но всего стаканов 2012, а переворачивать разрешается 2011.
2 в) Та же задача, но всего стаканов 2013, а переворачивать разрешается 2012.
- 5 4. Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?
- 5 5. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n . (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$).
2 а) Найдите десять таких пар натуральных чисел (a, b) , что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?
2 б) Для некоторого целого числа p выполняется $C(2012n) = C(n) + p$. Какие значения может принимать p ? (Укажите все возможности).
- 4 в) Конечно или бесконечно число пар натуральных чисел (a, b) , удовлетворяющих п. а)?

Бал-
лы

Задачи

- 3 1. Про группу из пяти человек известно, что
Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова,
Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева,
а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?
- 4 2. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n . (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$). Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b) , что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?
- 5 3. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по mine, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?
- 5 4. Окружность касается сторон AB , BC , CD параллелограмма $ABCD$ в точках K , L , M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB .
- 5 5. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдется такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/20$ всех экскурсий.

Бал
лыЗадачи

- 4 1. Таблица $m \times n$ заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по mine, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?
- 2 2. Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:
- 3 а) равные многоугольники;
б) правильные многоугольники?
- 5 3. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдется такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/17$ всех экскурсий.
4. Пусть $C(n)$ - количество различных простых делителей числа n .
- 2 а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b) , что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?
- 3 б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a + b) > 1000$?
- 5 5. Из 239 неотличимых на вид монет две – одинаковые фальшивые, а остальные – одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 25 февраля 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. На доске 6×6 расставили 6 не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьей поле покрасили по такому правилу: если ладьи, угрожающие этому полю, находятся от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном — то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться
- 1 а) красными;
2 б) синими?
2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку K , а на катете AC — точку L так, что $AK = AC$, $BK = LC$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке M . Докажите, что треугольник CLM равнобедренный.
- 4
3. В квадрате 4×4 расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рисунок). Можно ли по имеющимся данным восстановить
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | ? | ? | 2 |
| ? | 4 | 5 | ? |
| ? | 6 | 7 | ? |
| 3 | ? | ? | ? |
- 2 а) хотя бы одно скрытое число;
2 б) хотя бы два скрытых числа?
4. Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?
- 4
5. На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?
- 5

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 25 февраля 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- | | |
|---|--|
| 3 | 1. Биссектриса и высота, проведённые из одной вершины некоторого треугольника, делят его противоположную сторону на три отрезка. Может ли оказаться, что из этих отрезков можно сложить треугольник? |
| 4 | 2. Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трёх. Наименьшее общее кратное каждых трёх из данных чисел делится на оставшееся четвёртое. Докажите, что произведение данных чисел — точный квадрат. |
| 4 | 3. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке T . К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Общая касательная к окружностям, проведенная в точке T , пересекает прямую AB в точке M . Пусть AC — диаметр первой окружности. Докажите, что отрезки CM и AO_2 перпендикулярны. |
| 5 | 4. В углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзём (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася — два хода как королем (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? |
| 5 | 5. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три грани. Каждая грань покрашена в красный, жёлтый или синий цвет. Докажите, что число вершин, в которых сходятся грани трёх разных цветов, чётно. |

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

Бал-Задачилы

1. На доске 6×6 расставили 6 не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьей поле покрасили по такому правилу: если ладья, угрожающая этому полю, находится от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном – то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться:
- 1 а) красными;
 - 2 б) синими?
2. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение всех чисел в первой группе делится на цело на произведение всех чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?
3. В квадрате 4×4 расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рис.). Можно ли по имеющимся данным восстановить:
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | ? | ? | 2 |
| ? | 4 | 5 | ? |
| ? | 6 | 7 | ? |
| 3 | ? | ? | ? |
- 3 а) хотя бы одно скрытое число;
 - 2 б) хотя бы два скрытых числа?
- 5 4. В школе каждый четвероклассник дружил ровно с пятью другими четвероклассниками. Окончив 4 класс, некоторые четвероклассники перешли в гимназии. При этом среди оставшихся в школе пятиклассников стало на 26 пар друзей меньше. Теперь каждый из оставшихся пятиклассников дружит только с тремя другими пятиклассниками этой школы. Сколько теперь в школе пар друзей среди пятиклассников?
- 5 5. На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты

Бал

Задачи

лы

- 3 1. Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждого из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько – отрицательны?
- 4 2. Существуют ли такие 99 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 100, следующее делится на 99, третье делится на 98, ..., последнее делится на 2?
- 4 3. В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?
- 5 4. На одной из клеток поля 8×8 зарыт клад. Вы находитесь с металлоискателем в центре одной из угловых клеток этого поля и передвигаетесь, переходя в центры соседних по стороне клеток. Металлоискатель срабатывает, если вы оказались на той клетке, где зарыт клад, или в одной из соседних с ней по стороне клеток. Можно ли гарантированно указать клетку, где зарыт клад, пройдя расстояние не более 26?
- 5 5. Окружность радиуса 1 нарисована на шахматной доске так, что целиком содержит внутри белую клетку (сторона клетки равна 1). Докажите, что участки этой окружности, проходящие по белым клеткам, составляют суммарно не более $1/3$ от её длины.

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;

баллы за пункты одной задачи суммируются

Бал

Задачи

лы

- 4 1. Существуют ли нецелые числа x и y , для которых $\{x\} \cdot \{y\} = \{x+y\}$? (Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x .)
- 4 2. В треугольнике ABC провели биссектрису CL . Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает отрезок CL в точке K . Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и AKL касаются.
- 4 3. Имеется 21 ненулевое число. Для каждого из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что половина всех сумм положительна и половина — отрицательна. Каково наибольшее возможное количество положительных произведений?
- 2 4. а) Может ли некоторый шар высекать на гранях какого-нибудь правильного тетраэдра круги радиусов 1, 2, 3 и 4?
- 3 б) Тот же вопрос, если радиус шара должен быть равен 5.
- 5 5. В левой нижней клетке доски 100×100 стоит фишка. Чередую горизонтальные и вертикальные ходы в соседнюю по стороне клетку (первый ход — горизонтальный), она дошла сначала до левой верхней клетки, а потом до правой верхней. Докажите, что найдутся две такие клетки A и B , что фишка не менее двух раз делала ход из A в B .

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;
баллы за пункты одной задачи суммируются

Бал**Задачи****ды**

1. На шахматной доске
- 1 а) 3×3 ;
- 1 б) 5×5 ;
- 1 в) 14×14
- посчитать количество всех квадратов, границы которых проходят по границам клеток.
- 2 2. а) Найдутся ли три последовательных натуральных числа, сумма которых оканчивается на 2017?
- 1 б) Найдутся ли пять последовательных чисел, обладающих такими же свойствами?
- 1 в) Найдутся ли 9 последовательных чисел, обладающих такими же свойствами?
- 4 3. Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждой двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько – отрицательны?
- 1 4. а) Существуют ли такие 5 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 6, следующее делится на 5, третье делится на 4, ..., последнее делится на 2?
- б) Существуют ли такие 20 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 21, следующее делится на 20, третье – на 19, ..., последнее – на 2?
- 4 5. В ряд лежат 20 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 6 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;
баллы за пункты одной задачи суммируются

БаЗадачиллы

1. Можно ли разделить 13 одинаковых прямоугольных пирожных между 6 участниками 39-го
- 3 Турнира Городов так, чтобы каждое пирожное или не разрезалось вовсе, или разрезалось на 2 равные части, или разрезалось на 3 равные части?
2. В вершинах нескольких одинаковых равносторонних треугольников в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3. Треугольники сложили так, что их вершины совпали. Могут ли суммы чисел, записанных в каждой вершине, равняться
- 2 а) 2017;
- 2 б) 2018?
3. Балда договорился с попом отработать на него ровно год и расплатиться щелчками по лбу.
- 4 Балда предложил, чтобы за каждый отработанный день ему добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром (по его мнению) варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущенный вычитается аж 121 щелчок. По окончании срока выяснилось, что в обоих случаях поп должен получить от Балды одно и то же количество щелчков. Сколько именно?
4. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник по линиям сетки. Внутри него (не на границе!) оказалось единичных отрезков сетки на 90 больше, чем узлов. Определите все возможные размеры прямоугольника.
5. Пусть p , q , r и t простые числа, большие 3. Доказать, что $(p-q)(r-t)(q+p)(t+r)$ делится:
- 1 а) на 16;
- 2 б) на 36;
- 4 в) на 576.
6. На острове живут 30 представителей двух племён – рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. У каждого из них ровно трое знакомых среди остальных. Каждый произнёс фразу: «Среди моих знакомых островитян не более одного моего соплеменника». Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди них?
7. Каждый из трех равных разносторонних треугольников разрезали по медиане, проводя эти
- 8 медианы к различным сторонам. Всегда ли из получившихся шести треугольников можно составить (без «просветов» и «наложений») новый треугольник? Ответ обоснуйте.

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 16 февраля 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 4 1. Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка — либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?
- 4 2. Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?
- 4 3. На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B — точка пересечения высот треугольника DPQ .
- 5 4. Целое число n таково, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$ имеет решение в целых числах x, y, z . Докажите, что тогда и уравнение $x^2 + y^2 - xy = n$ имеет решение в целых числах x, y .
- 5 5. На доске 8×8 в клетках $a1$ и $c3$ стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку $h8$. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.

8								
7								
6								
5								
4								
3			○					
2								
1	○							
	a	b	c	d	e	f	g	h

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 16 февраля 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | |
|---|---|
| 4 | 1. Можно ли в каждую клетку таблицы 40×41 записать по целому числу так, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству тех соседних с ней по стороне клеток, в которых написано такое же число? |
| 4 | 2. Обсуждая в классе зимние каникулы, Саша сказал: «Теперь, после того как я слетал в Аддис-Абебу, я встречал Новый год во всех возможных полусферах Земли, кроме одной!» В каком минимальном количестве мест встречал Новый год Саша? Места, где Саша встречал Новый год, считайте точками на сфере. Точки на границе полусферы считаются не принадлежащими этой полусфере. |
| 5 | 3. По кругу стоят буквы A и B , всего 41 буква. Можно заменять ABA на B и наоборот, а также BAB на A и наоборот. Верно ли, что из любого начального расположения можно получить такими операциями круг, на котором стоит ровно одна буква? |
| 2 | 4. Существует ли непостоянный многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, который можно представить в виде суммы $a(x) + b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ — квадраты многочленов с действительными коэффициентами, |
| 3 | а) ровно одним способом;
б) ровно двумя способами? |
| | Способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. |
| 5 | 5. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Произвольная прямая ℓ , проходящая через Q , повторно пересекает окружности в точках A и B . Прямые, касающиеся окружностей в точках A и B , пересекаются в точке C , а биссектриса угла CPQ пересекает прямую AB в точке D . Докажите, что все точки D , которые можно так получить, выбирая по-разному прямую ℓ , лежат на одной и той же окружности. |

•Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;

•баллы за пункты одной задачи суммируются

Бал

Задачи

лы

4 1. Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка – либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

4 2. Можно ли выписать в ряд 14 различных натуральных чисел так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

3. Найдите последнюю цифру значения выражения:

1 а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 9 \cdot 10$;

4 б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 11 + \dots + 2019 \cdot 2020$.

5 4. Незнайка записал число, не содержащее нулей. Потом он переставил каким-то образом цифры и сложил полученное число с первоначальным. В результате у Незнайки получилось число, состоящее только из единиц. Правильно ли выполнил Незнайка сложение?

5 5. На доске 8×8 в клетках a1 и g7 стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по числу клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в жет действовать так, чтобы всегда выигрывать, одной клетке может стоять только одна фишка,

8								
7							о	
6								
5								
4								
3								
2								
1	о							
	a	b	c	d	e	f	g	h

ковые фишки. Петя и Вася выбирают любую фишку и горизонтали вправо на любое клетку h8. Кто из игроков может как бы ни играл соперник? В прыгать через фишку нельзя.

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;
- баллы за пункты одной задачи суммируются

БалЗадачилы

1. Можно ли отметить на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и отмеченная) клетка граничила по стороне а) ровно с одной отмеченной клеткой?
2 б) ровно с двумя отмеченными клетками?
2. В автомобиль установили 4 новых одинаковых покрышки. Известно, что на передних колесах эти покрышки стираются за 28 000 км, а на задних колесах – за 42 000 км. Через сколько километров после установки надо поменять покрышки местами, чтобы все они стерлись одновременно?
3. В социальной сети имеется группа, состоящая из 2019 подписчиков. Среди них есть парни и девушки. Анна ведёт переписку с двумя парнями из подписчиков группы, Белла – с тремя, Вера – с четырьмя и так далее все девушки-подписчицы до администратора группы, которая ведёт переписку со всеми парнями, подписанными на её группу. Сколько парней подписано на эту группу?
4. В каждой клетке полоски длины 10 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 3 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?
5. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка трэф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки трэф можно гарантировать успех фокуса?

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты

БалЗадачилы

- 4 1. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка трэф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки трэф можно гарантировать успех фокуса?
- 4 2. Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C . Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY . Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P .
- 4 3. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 3 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?
- 5 4. Даны целые числа $a_1, \dots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \dots, a_{1000}^2$. Сумма любых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2 . Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \dots, a_{1000}$ делится на 41?
- 5 5. У Васи есть неограниченный запас брусков $1 \times 1 \times 3$ и уголков из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m \times n \times k$, где m , n и k – целые числа, большие чем 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками.

- Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты

БалЗадачилы

- 3 1. Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка трэф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки трэф можно гарантировать успех фокуса?
- 4 2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ такой, что $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K . Докажите, что $BK \parallel AE$.
- 4 3. Любое число x , написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x+1$, либо на $[x/2]$ (наибольшее целое число, не превосходящее $x/2$). Докажите, что если вначале написано 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.
- 5 4. Дан многоугольник, у которого любые две соседние стороны перпендикулярны. Назовем две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно.
- 5 5. В каждой клетке полосы длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые 2 соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые 2 фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

• Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

Бал-

Задачи

лы

1. Имеется прямоугольный стол, разделённый на ячейки, и большое количество одинаковых монет. Два игрока кладут по очереди по одной монете в свободную ячейку стола или две монеты в две свободные соседние по стороне ячейки (по одной монете в каждую ячейку) до тех пор, пока это возможно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (опишите стратегию), если размеры стола:
 - 1 а) 5×5 ;
 - 1 б) 4×5 ;
 - 2 в) $n \times m$?
- 4 2. Можно ли расставить на поле 4×4 шахматного короля, две ладьи и два слона так, чтобы фигуры не били друг друга? (Все фигуры бьют по шахматным правилам.)
- 5 3. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?
- 5 4. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 101, 102, 104, 105 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантировано определить, где какая гиря? (Каждое следующее взвешивание выбирается по результатам всех предыдущих.)
- 6 5. В треугольнике ABC провели высоты AH и BZ , в также биссектрисы AY и BT . Известно, что углы HAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 14 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | | |
|---|----|--|
| 4 | 1. | Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел? |
| 4 | 2. | В треугольнике ABC провели высоты AH и BZ , а также биссектрисы AY и BT . Известно, что углы HAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный? |
| 4 | 3. | У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.) |
| 3 | 4. | |
| | а) | Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных? |
| 3 | б) | А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных? |
| | 5. | На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры |
| 2 | а) | 100×101 клеток; |
| 4 | б) | 100×100 клеток? |

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 14 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | | |
|---|----|---|
| | 1. | |
| 2 | а) | Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой? |
| 2 | б) | Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника. |
| | 2. | |
| 2 | а) | У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.) |
| 2 | б) | Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой. |
| 5 | 3. | При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел? |
| 5 | 4. | Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней? ($[x^2]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2 .) |
| 6 | 5. | Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , точка M — середина стороны AC . Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K . Докажите, что K лежит на прямой BM . |

• Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты:

Бал

Задачи

лы

3

1. Таблица 5×5 заполнена нулями. За ход разрешается прибавить к любым трем числам таблицы по 1. Можно ли за несколько ходов заполнить эту таблицу числами 1,2,3, ..., 25?

4

2. В ряд выстроились 50 школьников. Среди них 15 учеников 7 «А» класса, 10 учеников 7 «Б» класса, 10 учеников 7 «В» класса и еще 15 шестиклассников. Известно, что никакие два семиклассника из разных классов не стоят рядом. Докажите, что какие-то три школьника, стоящие подряд, учатся в одном и том же классе.

5

3. Найдите наименьшее натуральное число такое, что суммы подряд идущих его цифр дадут все натуральные числа от 1 до 9 (сама цифра считается суммой с одним слагаемым).

5

4. Пусть p и q – такие целые числа, что $(16p + 17q)(17p + 16q)$ делится на 11. Докажите, что $(16p + 17q)(17p + 16q)$ делится на 121.

6

5. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 11 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | |
|---|---|
| 3 | 1. На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки? |
| 2 | 2. Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что |
| 3 | а) каждый побывал в полуфинале более одного раза; |
| | б) каждый побывал в финале. |
| 5 | 3. В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник? |
| 5 | 4. Дан равносторонний треугольник со стороной d и точка P , расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a , b и c . Докажите, что найдётся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q , расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b , c и d . |
| 5 | 5. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.) |

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 11 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | |
|---|--|
| 3 | 1. Каждый из квадратных трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x) + Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают? |
| 4 | 2. На прямой отметили точки $X_1, \dots, X_{10}$ (именно в таком порядке) и построили на отрезках X_1X_2 , X_2X_3 , $\dots$, X_9X_{10} как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10} . Найдите α . |
| 5 | 3. Натуральное число N кратно 2020. В его десятичной записи все цифры различны, причём если любые две из них поменять местами, получится число, не кратное 2020. При каком количестве цифр в десятичной записи числа N такое возможно? |
| 5 | 4. Стороны треугольника разделены основаниями биссектрис на два отрезка каждая. Обязательно ли из шести образовавшихся отрезков можно составить два треугольника? |
| 3 | 5. По кругу лежит 101 монета, каждая весит 10 г или 11 г. Докажите, что найдётся монета, для которой суммарная масса k монет слева от неё равна суммарной массе k монет справа от неё, если |
| 3 | а) $k = 50$; |
| 3 | б) $k = 49$. |