



Задачи для 5 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

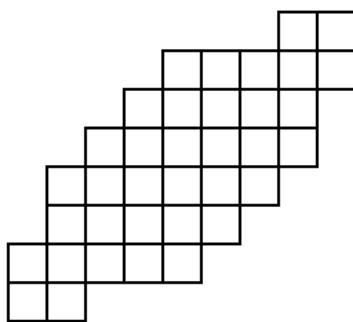
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

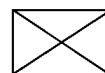
а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (А. А. Теслер)

2. Покажите, как разрезать «конфетку» на восемь фигур двух видов (по четыре фигуры каждого вида) и собрать из этих восьми фигур квадрат. (Фигуры одного вида должны быть одинаковыми, то есть совпадать при наложении друг на друга, но они могут быть по-разному повернуты.) (Л. С. Корешкова)



3. В клетчатом прямоугольнике длиной 303 клетки и шириной 202 клетки провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (О. А. Пяйве, А. А. Теслер)



4. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов? (А. А. Теслер)

5. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (В. П. Федотов)

6. Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных?

(В. П. Федотов)



Задачи для 6 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

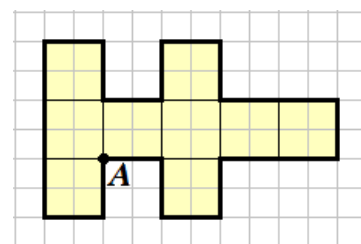
а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021?

(А. А. Теслер)

2. На клетчатом листе нарисована фигура. Проведите луч с началом в точке А, разрезающий её на две части равной площади. Покажите какой-нибудь узел сетки (кроме точки А), через который проходит луч, и объясните, почему площади двух частей равны.

(Л. С. Корешкова)



3. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов?

(А. А. Теслер)

4. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны.

(В. П. Федотов)

5. Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных?

(В. П. Федотов)

6. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту.

(П. Д. Муленко)



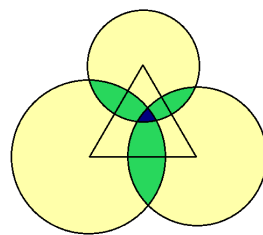
Задачи для 7 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

- За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).
 - Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?
 - Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (А. А. Теслер)
- Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A , B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (Л. С. Корешкова)
- Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (В. П. Федотов)
- В клетчатом прямоугольнике 20210×1505 провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (О. А. Пяйве, А. А. Теслер)

- На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника. (П. Д. Муленко)



- На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту.

(П. Д. Муленко)



Задачи для 8 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

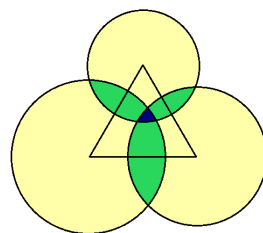
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A , B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (Л. С. Корешкова)

2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$? Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a , то есть наибольшее целое число, не превосходящее a . (О. А. Пяйве)

3. В параллелограмме $ABCD$ ($AB \neq BC$) из тупого угла B провели две высоты, BH и BK (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник BHK оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла BAD . (Л. С. Корешкова)

4. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника. (П. Д. Муленко)

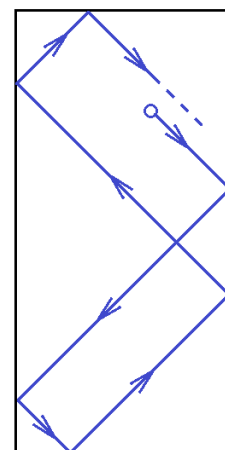


5. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту. (П. Д. Муленко)

6. Дан прямоугольник размером 2021×4300 . В какой-то точке внутри него стоит бильярдный шар. Его запускают по прямой, образующей угол 45° со сторонами прямоугольника. Достигая стороны, шар отражается также под углом 45° ; если шар попадает в угол, то выходит из него по той же линии, по которой вошёл. (Пример начала пути шара показан на рисунке.) а) Для любой ли точки верно, что если выпустить из неё шар по таким правилам, он вернётся туда ещё раз?

- б) Допустим, что стартуя в некоторой точке A , шар через некоторое время в неё возвращается. Какое максимальное количество ударов о бортики он может совершить, прежде чем впервые вернётся в точку A ?

(О. А. Пяйве)





Задачи для 9 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

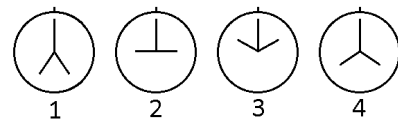
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 10 раз меньше, чем тюльпанов? (А. А. Теслер)
2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$? Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a , то есть наибольшее целое число, не превосходящее a . (О. А. Пяйве)
3. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Может ли жёлтая площадь равняться 100, зелёная 10, а синяя — 1? (П. Д. Муленко, А. А. Теслер)
4. На плоскости даны такие четыре точки A, B, C, D , что $AB = BC = CD$, $BD = DA = AC$. Найдите углы четырёхугольника с вершинами в этих точках. (А. А. Теслер)
5. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Какое минимальное количество неопределённых фотографий может быть среди них?

(А. А. Теслер)

6. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{32}{y^5} + \frac{48}{y^3} + \frac{17}{y} - 15, \\ \frac{1}{y} = \frac{32}{z^5} + \frac{48}{z^3} + \frac{17}{z} - 15, \\ \frac{1}{z} = \frac{32}{x^5} + \frac{48}{x^3} + \frac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

(А. Б. Владимиров)



Задачи для 10 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A , B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (Л. С. Корешкова)
2. Дан треугольник ABC . O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC . На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D , что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC . M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки D , M , C лежат на одной прямой. (О. А. Пяйве)
3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (В. П. Федотов)
4. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997} + \sqrt{y-932} + \sqrt{z-796} = 100, \\ \sqrt{x-1237} + \sqrt{y-1121} + \sqrt{3045-z} = 90, \\ \sqrt{x-1621} + \sqrt{2805-y} + \sqrt{z-997} = 80, \\ \sqrt{2102-x} + \sqrt{y-1237} + \sqrt{z-932} = 70. \end{cases}$$

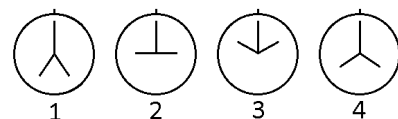
(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

5. Соревнование по бегу на непредсказуемую дистанцию проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B , после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Найдите медианное значение длины этой дуги, то есть такое m , что длина дуги будет превышать m с вероятностью ровно 50%. (А. А. Теслер)
6. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Сколько неопределённых фотографий может быть среди них? (А. А. Теслер)



Задачи для 11 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.

Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

1. Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране? (А. А. Теслер)

2. Дан треугольник ABC . O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC . На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D , что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC . M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки D , M , C лежат на одной прямой. (О. А. Пяйве)

3. Найдите все вещественные решения системы уравнений

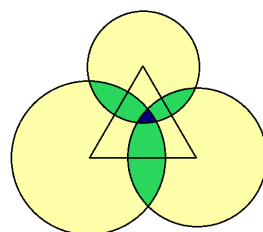
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{32}{y^5} + \frac{48}{y^3} + \frac{17}{y} - 15, \\ \frac{1}{y} = \frac{32}{z^5} + \frac{48}{z^3} + \frac{17}{z} - 15, \\ \frac{1}{z} = \frac{32}{x^5} + \frac{48}{x^3} + \frac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

(А. Б. Владимиров)

4. Территория Тридесатого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида $\{ak + b | k \in \mathbb{Z}\}$, где $a \neq 0$ и b — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это? (А. А. Теслер)

5. Соревнование по бегу на *непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B , после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится? (А. А. Теслер)

6. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника? (П. Д. Муленко, А. А. Теслер)





Задачи для 5 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

1. Дедушка дал Пете несколько карточек и попросил составить из них равенство. У Пети получилось вот что:

$$\boxed{8} \boxed{1} - \boxed{7} \boxed{5} = \boxed{0} \boxed{6}$$

«Мне не очень нравится твоё равенство, — сказал дедушка, — ведь в нём число 6 записано как 06, а так писать не принято». Придумайте, как Пете из всех карточек сложить верное равенство, которое понравится дедушке. (А. А. Теслер)

2. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.

В первый день Красный, Зелёный, Чёрный и Фиолетовый выбрали Жёлтого, Синий и Голубой — Зелёного, Жёлтый — Красного, Розовый — Фиолетового. По итогам голосования Жёлтого космонавта выгнали с корабля.

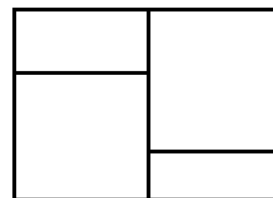
Во второй день Красный и Чёрный выбрали Голубого, Синий, Зелёный, Розовый и Фиолетовый — Чёрного, Голубой — Фиолетового. В результате Чёрный космонавт был выгнан. В третий день Красный, Голубой и Зелёный выбрали Фиолетового, Синий — Красного, Розовый и Фиолетовый — Синего.

Вычислите предателей, если голосуют они одинаково. Объясните, почему предатели — именно они, а не кто-нибудь другой. (П. Д. Муленко)

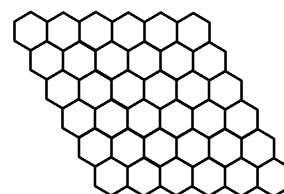
3. Однажды Геральта укусила виверна. Лекарь велел ему принимать лекарство в течение 180 дней по графику «2 через 1»: два дня приёма перемежаются одним днём отдыха. Геральт начал принимать лекарство в понедельник. Сколько раз он будет его принимать по понедельникам и вторникам подряд? (Л. С. Корешкова)

4. Женья играет в игру «Сапёр», в которой необходимо установить, в каких клетках квадратной таблицы расположены мины. Для этого в каждой клетке, где нет мин, написано, в скольких соседних с ней (по стороне или углу) клетках мины есть. На первом уровне игра проходит на поле 5×5 , причём игроку на долю секунды показывается решение. Женья успела заметить, что ровно в трёх клетках стоит число 8, но не запомнила, где именно. Сколько расстановок мин удовлетворяют этому условию? (П. Д. Муленко)

5. В стекольной мастерской сделали необычное окно. Оно имеет форму прямоугольника, разделённого по вертикали на две равных части. В каждой половинке есть форточка: в левой — сверху, площадью в шестую часть от всего окна и периметром 92 сантиметра; в правой — снизу, площадью в восьмую часть всего окна и периметром 84 сантиметра. Чему равны периметры всего окна и остальных кусков стекла? (Л. С. Корешкова)



6. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.) (А. А. Теслер)





Задачи для 6 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

1. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись один или два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.

На очередное голосование пришли пятеро: Красный, Синий, Зелёный, Фиолетовый и Жёлтый. Каждый из них произнёс по два утверждения.

Красный: Синий — мирный. Жёлтый — предатель.

Синий: Я мирный. Фиолетовый — мирный.

Зелёный: Я мирный. Красный — предатель.

Фиолетовый: Красный — мирный. Зелёный — предатель.

Жёлтый: Зелёный — мирный. Фиолетовый — предатель.

Известно, что мирные космонавты всегда говорят правду, а предатели всегда врут. Объясните, кто же из них является предателем (или предателями) и почему. (П. Д. Муленко)

2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.

1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям?

В английском алфавите 26 букв.

(П. Д. Муленко)

3. Люба и Андрей играют в такую игру. Люба называет натуральное число. После этого игроки по очереди (начиная с Андрея) либо увеличивают его на 7, если оно нечётно, либо делят пополам, если оно чётно. Тот, кто снова назовёт первоначальное число, выигрывает. Может ли Люба первым ходом назвать такое число, чтобы выиграть ровно на третьем своём ходу?

(Л. С. Корешкова)

4. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны, а при сложении всяких двух соседних цифр получается простое число.

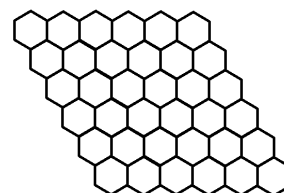
(С. П. Павлов)

5. Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т.д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число оренов, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч оренов. Кто именно дружит с продавцом?

(Л. С. Корешкова)

6. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.)

(А. А. Теслер)





Задачи для 7 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

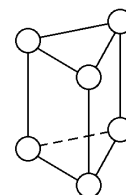
1. Существует ли число, имеющее ровно 8 натуральных делителей: $a < b < c < d < e < f < g < h$, такое что $a + b + c = d$ и $e + f + g = h$? (М. В. Карлукова)

2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.

1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (П. Д. Муленко)

3. В каждой вершине треугольной призмы (см. рисунок) написали по двузначному числу, причём оказалось, что две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда у чисел есть в записи одинаковая цифра. Какое минимальное значение может принимать самое большое из чисел? (Запись двузначного числа не может начинаться с нуля.) (А. А. Теслер)



4. Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т.д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число орен, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч орен. Кто именно дружит с продавцом? (Л. С. Корешкова)

5. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M . Может ли каждый угол каждого из треугольников MAB , MBC , MCD , MDA отличаться от прямого угла более чем на 10° ? (А. А. Теслер)

6. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат 8×8 клеток. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:

- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?

(С. П. Павлов)



Задачи для 8 класса

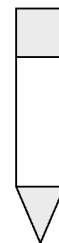
Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

1. Ваня нарисовал чертёж карандаша, где резинку изобразил квадратом, тело карандаша — прямоугольником той же ширины, а кончик — равнобедренным треугольником, основание которого совпадает с одной из сторон прямоугольника. Периметр всей фигуры составил 96 мм, причём у квадрата и треугольника периметры равны, а у прямоугольника в два раза больше. Найдите площадь чертежа.

(Л. С. Корешкова)



2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв.

(П. Д. Муленко)

3. Клетки таблицы 7×7 пронумеровали по порядку числами от 1 до 49 (в первой строке — от 1 до 7 слева направо, во второй — от 8 до 14 и т. д.). После этого из неё вырезали несколько непересекающихся квадратов 2×2 , а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 4? (Найдите все возможные значения этого остатка и докажите, что других нет.)

(А. А. Теслер)

4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M . Для каждого из углов каждого из треугольников MAB , MBC , MCD , MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20° , а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий? (А. А. Теслер)

5. Назовём число *примечательным*, если всего его цифры не больше 6 и оно является точным квадратом. Назовём число *замечательным*, если оно примечательное и, кроме того, остаётся примечательным, если все его цифры одновременно увеличить на 1. Найдите все замечательные числа.

(Л. С. Корешкова)

6. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:

- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?

(С. П. Павлов)



Задачи для 9 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

1. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв.

(П. Д. Муленко)

2. Какова максимально возможная площадь треугольника, две медианы которого равны m ?
(А. А. Теслер)
3. Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1), \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1). \end{cases}$$

(Л. С. Корешкова)

4. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ — все натуральные делители числа x . Назовём число x *п-четверным*, если $k = 4n$ и $a_1 + a_2 + a_3 = a_4, a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \dots, a_{k-3} + a_{k-2} + a_{k-1} = a_k$. Докажите, что такое число существует для любого натурального n .

(М. В. Карлукова, П. Д. Муленко)

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из двух колод: такую же, как у первого, или состоящую только из синих карт. Какая из этих колод даст второму игроку большую вероятность выигрыша?

(Е. С. Голикова)

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8?

(А. А. Теслер)



Задачи для 10 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

1. В десятичной записи числа N все цифры различны и не равны нулю. Если выписать все числа, получаемые из N перестановкой цифр (в том числе само число N), и найти всевозможные разности этих чисел, то все разности окажутся различными. (Например, число $N = 123$ не удовлетворяет этому условию, так как $132 - 123 = 321 - 312$.) Найдите самое большое такое N .
(А. А. Теслер)
2. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M . Для каждого из углов каждого из треугольников MAV , MBC , MCD , MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20° , а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий?
(А. А. Теслер)
3. Пусть $a_1 + \dots + a_m = n$, где $a_1, \dots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_m!$.
(О. А. Пяйве)
4. Даны три различных положительных числа a, b, c , причём $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0$. Докажите, что

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2} > \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{2}.$$

(А. Б. Владимиров)

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из трёх колод:
а) такую же, как у первого;
б) состоящую только из синих карт;
в) состоящую из 15 синих и 15 зелёных карт.
Какая из этих колод даст второму игроку большую вероятность выигрыша?

(Е. С. Голикова)

6. На координатной плоскости нарисованы 2022 параболы, заданные уравнениями $f_i(x) = x^2 + b_i x$ ($1 \leq i \leq 2022$). Существует ли такая точка M и такая прямая l , что сумма расстояний от вершин всех парабол до точки M равна сумме расстояний от вершин всех парабол до прямой l ?

(А. Б. Владимиров)



Задачи для 11 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

1. Пусть $a_1 + \dots + a_m = n$, где $a_1, \dots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_m!$ (О. А. Пяйве)
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ отметили середину O медианы AM треугольника $AB' D'$. Оказалось, что эта точка удалена от прямых AB' , AD' и от грани $ABCD$ на расстояние 1. Найдите объём параллелепипеда. (П. Д. Муленко)
3. Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1), \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1). \end{cases}$$

(Л. С. Корешкова)

4. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:
 - нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
 - нельзя проводить две диагонали с общим концом.Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?

(С. П. Павлов)

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право взять любую колоду из 30 карт. Может ли он подобрать колоду так, чтобы вероятность его выигрыша была больше $1/2$?

(Е. С. Голикова)

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8?

(А. А. Теслер)