Занятие 0. Письменная работа

9 класс

1. Замените звёздочки в записи числа 72*3* цифрами так, чтобы число делилось без остатка на 45.

2. Каждый из 33 школьников написал две контрольные работы и получил за каждую из них одну из оценок 2, 3, 4 или 5. Докажите, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за каждую из работ.

3. Напишите какое-нибудь уравнение, равносильное неравенству $x \geq 1$, то есть уравнение, множеством решений которого является луч $[1;+\infty)$.

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 2, при делении на 7 — остаток 4, а при делении на 9 — остаток 7.

5. В стакан, в котором находились 1000 бактерий, поместили вирус. Каждую минуту каждый из имеющихся в стакане вирусов съедает одну бактерию, после чего каждая из оставшихся бактерий делится на две бактерии, а каждый вирус — на два вируса. Наступит ли момент, когда в стакане не останется ни одной бактерии? Если да, то когда?

6. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найдите величину угла NMA, если величина угла BAC равна $60°$.

7. а) Можно ли выписать в ряд 10 чисел так, чтобы сумма любых трёх рядом стоящих чисел была положительной, а сумма всех чисел — отрицательной?
б) Можно ли выписать 10 чисел так, чтобы сумма любых трёх из них была положительной, а сумма всех чисел — отрицательной?

Занятие 1. Знакомство

1. Среди 30 человек каждому нравятся ровно k других, однако среди них нет двух человек, которые нравятся друг другу. Какое максимальное значение может принимать k?

2. В треугольнике ABC проведены высоты AH и BK. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку HK делит сторону AC пополам.

3. Представьте число 1 в виде суммы а) трёх; б) четырёх; в) пяти; г) n, где $n > 2$, различных дробей с числителем 1.

4. В классе 25 человек. У всех, кроме Лилии, разное число друзей среди её одноклассников. Сколько друзей-одноклассников у Лилии?

5. Диаметром многоугольника называют наибольшее расстояние между его вершинами. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на 3 многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

6. В стране Оз города соединены дорогами. Правитель решил ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы из любого города можно было выехать, но нельзя было вернуться обратно. Сумеет ли он это осуществить?

7. Элементы множества A — натуральные числа, причём для любых двух различных чисел a и b из A выполнено неравенство $10|a - b| > ab$. Какое наибольшее число элементов может быть в A?

8. Петя выписывает числа в ряд. Вначале он написал 1, затем — 2, а каждое следующее число он получает из предыдущего прибавлением к нему его наибольшего простого делителя (а именно, третье число равно $2 + 2 = 4$, четвёртое равно $4 + 2 = 6$, и так далее). Сколько чисел выписано между а) 47^2 и 53^2; б) p^2 и q^2, где p и q — соседние простые числа? в) Какое число стоит на 3999-м месте?

Занятие 2. Странные игроки

1. Тридцать три богатыря устроили соревнования по борьбе. Каждый боролся с каждым ровно один раз. Победа давала 1 очко, поражение — 0, а ничьих не было. Один богатырь выступил странно. Он победил всех, кто набрал очков больше, чем он, и проиграл тем, кто набрал очков меньше него. Равного с ним количества очков не набрал никто. Докажите, что странный богатырь занял место не выше 13-го и не ниже 21-го.

Рассмотрим турниры, где допускают ничьи (ничья приносит 1/2 очка). *Странным* будем называть борца, выигравшего у всех, кто набрал очков больше, чем он, и проиграл всем, кто набрал очков меньше. С теми, кто выступил наравне с ним, такой богатырь мог бороться как угодно.

2. Могли ли на первом месте в таком турнире оказаться только странные борцы (при условии, что мест было хотя бы два)?

3. Докажите, что все странные богатыри набрали поровну очков.

4. Известны результаты всех богатырей. Известно к тому же, что в турнире были странные участники. Можно ли узнать, сколько очков они набрали?

5. Докажите, что если в круговом турнире все участники, кроме одного, получили одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

6. В ряд выписаны числа от 1 до 2002. Двое по очереди вычёркивают по одному числу до тех пор, пока не останутся только два числа. Первый выигрывает, если сумма оставшихся чисел делится на 3, второй — если не делится. Кто выиграет при правильной игре?

7. На шахматной доске в угловой клетке стоит король. Двое по очереди ходят королём (по шахматным правилам). Ставить короля в клетку, где он уже был, нельзя. Тот, кто не может сделать хода, проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

Занятие 3. Вокруг чисел

1. Найдите все такие натуральные k, при которых число $2^k + 1$ является квадратом натурального числа.

2. Можно ли записать натуральное число и его квадрат, использовав каждую из десяти цифр 0, 1, 2, ..., 8, 9 ровно один раз?

3. Петя умножает число 2002 на правильную дробь так, чтобы результат оказался снова натуральным числом. С результатом он проделывает то же самое, и так далее. Какое наибольшее количество умножений он сможет проделать?

4. Известно, что $f(x - y) = f(x)f(y)$ для любых x и y. Найдите все такие функции f.

5. Числа от 1 до $2n$ переставили в некотором порядке: $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.
   а) Какое максимальное значение может принимать выражение
   $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{2n-1} - a_{2n}|$?
   б) Сколько существует различных перестановок, для которых значение этого выражения будет максимальным?

6. Множество T рациональных чисел назовём *полным*, если для каждой дроби p/q из множества T дроби $p/(p+q)$ и $q/(p+q)$ тоже содержатся в T. Найдите все такие положительные рациональные числа r, что любое полное множество, содержащее число r, содержит все рациональные числа между 0 и 1.

7. $ABCD$ — квадрат. Докажите, что для любой точки O плоскости верно неравенство $OA + OB + OC > OD$.

Занятие 4. Раскраски

1. Каждую грань куба $3\times3\times3$ разбили на три прямоугольника 3×1 так, что длинные стороны прямоугольников на соседних гранях перпендикулярны друг другу. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить 18 полученных прямоугольников, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общий отрезок границы, были разного цвета?

2. Плоскость раскрашена в красный и синий цвета. Докажите, что найдутся две одноцветные точки на расстоянии 1 метр друг от друга.

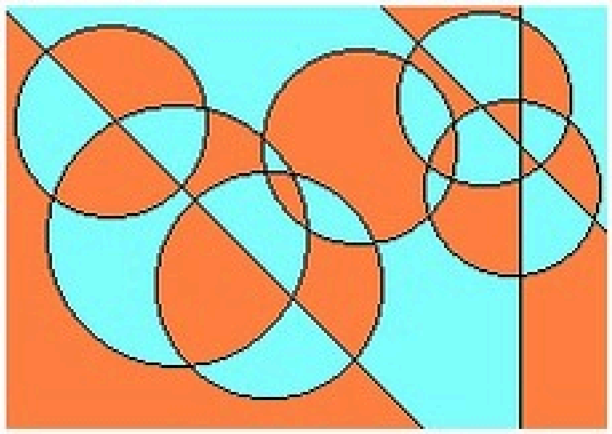
3. а) Плоскость раскрашена в 4 цвета. Докажите, что найдётся трёхцветная прямая.
   б) Плоскость раскрашена в 3 цвета. Обязательно ли на ней найдётся трёхцветная прямая?

4. В булке оказался запечён изюм двух сортов. Докажите, что внутри булки найдутся две такие точки на расстоянии 1 см, что либо они не принадлежат никаким из изюмин, либо принадлежат изюминам одного сорта.

Определение. Граф называют правильно раскрашенным, если все его вершины покрашены так, что любые две вершины, соединённые ребром, покрашены в разный цвет.

Определение. Карту называют правильно раскрашенной, если любые две страны, имеющие общий участок границы, покрашены в разные цвета (одна точка участком границы не считается).

5. Плоскость разбита на части несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что полученную карту можно правильно раскрасить в два цвета.



6. Для каждого p придумайте граф, который нельзя правильно раскрасить в p цветов, а любой его подграф с меньшим числом вершин — можно.

7. Расположите на плоскости несколько одинаковых квадратов так, чтобы получилась карта, не раскрашиваемая в три цвета.

8. Остров Тото имеет форму многоугольника. На нём расположено несколько стран, каждая из которых имеет форму треугольника, причём каждые две граничащие страны имеют целую общую сторону (то есть вершина никакого из треугольника разбиения не лежит внутри стороны другого треугольника разбиения). Докажите, что карту этого острова можно правильно раскрасить тремя красками.

Занятие 5. Последовательности

1. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдётся бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.

2. а) Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2$, $1001! + 3$, ..., $1001! + 1001$).
б) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

3. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k} = 3k$ для любого k. Найдите значение a_{100}.

4. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$, что НОК$(a_1,a_2)$ > НОК(a_2,a_3) > ... > НОК(a_{99},a_{100})?

НОК(m,n) — это наименьшее общее кратное чисел m и n, то есть наименьшее натуральное число, которое делится и на m, и на n.

5. Рассмотрим последовательность слов из букв A и B. Первое слово — «A», второе — «B», k-е слово получается приписыванием к $(k - 2)$-му слову справа $(k - 1)$-го (так что начало последовательности имеет вид: «A», «B», «AB», «BAB», «ABBAB», ...). Может ли в этой последовательности встретиться периодическое слово, то есть слово, состоящее из нескольких (по меньшей мере двух) одинаковых кусков, идущих друг за другом, и только из них? (Например, слово «BABBBABB» — периодическое, а слово «ABABBBABB» — нет.)

6. Правильный $4k$-угольник разрезан на параллелограммы. Докажите, что среди них не менее k прямоугольников.

Занятие 6. Количество информации

На окне стояли 33 зелёных и 33 красных утюга в шахматном порядке.
— Явка провалена,— догадался Штирлиц.

1. Среди 27 монет одна является фальшивой и весит меньше, чем настоящая. За какое минимальное количество взвешиваний можно выявить фальшивую монету?

2. Никита загадал натуральное число от 1 до 1000.
а) Андрей называет какое-то число, а Никита отвечает ему "угадал", "меньше" или "больше". За какое наименьшее число попыток Андрей гарантированно узнает задуманное число?
б) Авраам может задавать вопросы, на которые Никита отвечает только "да" или "нет". Сколько вопросов понадобится в этом случае?
в) Может ли Аарон обойтись таким же количеством вопросов, что и в пункте б), если Андрей обязан задать их все сразу, то есть не использует ответы на предыдущие вопросы при выдумывании следующих?

3. В русском языке 33 буквы. Нужно сопоставить каждой букве уникальную цепочку из нулей и единиц длины n.
а) При каком наименьшем n это возможно?
б) Можно ли закодировать все сочетания из двух букв цепочками нулей и единиц так, чтобы длина цепочки для каждого сочетания была меньше $2n$, где n — число из пункта а) (то есть можно ли закодировать двухбуквенные слова более экономно, чем кодируя каждую букву отдельно)?

4. Два шпиона работают учителями в одной школе. Они передают секретную информацию через классный журнал. На своём уроке первый шпион может поставить каждому из 20 учеников 9$^{\text{И}}$ класса одну из оценок 3, 4, 5. Какое количество информации он передаст таким образом? Например, сможет ли он закодировать точную дату окончания второй четверти?

5. Имеются шесть монет различного веса. Докажите, что нельзя упорядочить их по возрастанию массы, сделав меньше десяти взвешиваний.

6. В языке зулусов три буквы: А, Б и В. Когда они, наконец, изобрели телеграф, решено было кодировать тексты следующим образом: А — 00, Б — 01, В — 10, а цепочка 11 означает конец слова. Буква А встречается втрое чаще, чем Б, буква Б — втрое раза чаще, чем В, а средняя длина слова — 13 букв. Используя эти данные, придумайте другой способ кодирования, при котором количество нулей и единиц, передаваемых по телеграфу, в среднем уменьшится (разрешено разные буквы кодировать цепочками разной длины). Посчитайте, во сколько раз.

7. Имеется одна заведомо настоящая монета и 5 подозрительных, среди которых одна фальшивая (неизвестно, тяжелее она или легче настоящей).
а) Найдите фальшивую монету за два взвешивания.
б) Докажите, что если бы подозрительных монет было 6, то пункт а) не имел бы решения.
в) Среди какого максимального количества монет можно выявить фальшивую за три взвешивания (никаких других монет нет)?

Занятие 7. Степень точки относительно окружности

1. Через точку M вне данной окружности провели секущую, которая пересекает окружность в точках A и B, и касательную MC (M — точка касания).
   а) Докажите равенство $MA \cdot MB = MC^2$.
   Следствие. Число $MA \cdot$ MB не зависит от выбора секущей.
   б) Выразите $MA \cdot MB$ через r — радиус окружности и d — расстояние от M до центра окружности.
   в) Пусть точка M лежит внутри окружности, точки A и B — концы хорды, проходящей через точку M. Докажите, что и в этом случае произведение $MA \cdot MB$ не зависит от выбора хорды, и выразите $MA \cdot MB$ через r и d.

Определение. Пусть d — расстояние от точки M до центра окружности w, а r — её радиус. Число d^2 - r^2 называют степенью точки M относительно окружности w. Обозначение: $\deg_w M$.

2. Чему равна степень точки, лежащей на окружности, относительно этой окружности?

3. Пусть w_1 и w_2 — две непересекающиеся окружности, ни одна из которых не расположена внутри другой.
   а) Найдите хотя бы одну точку, степени которой относительно данных окружностей равны.
   б) Найдите три такие точки (подсказка: воспользуйтесь результатом задачи 1).

4. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и проходящую через две данные точки, лежащие по одну сторону от этой прямой.

5. Пусть d_1 и d_2 — расстояния от точки M до центров O_1 и O_2 окружностей w_1 и w_2. Докажите равенство $d_1^2 - d_2^2 = p_1^2 - p_2^2$, где p_1 и p_2 — проекции отрезков d_1 и d_2 на прямую O_1O_2.
   Выведите отсюда, что если $\deg_{w_1} M = \deg_{w_2} M$, то и для любой другой точки N перпендикуляра к прямой O_1O_2, проведённого через точку M, справедливо равенство $\deg_{w_1} N = \deg_{w_1} N$.

Определение. Радикальной осью окружностей w_1 и w_2 называют множество всех точек, степени которых относительно этих окружностей равны.

6. Докажите, что радикальная ось двух неконцентрических окружностей — это прямая, перпендикулярная их линии центров.

7. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три прямые, являющие радикальными осями первой и второй, второй и третьей, третьей и первой окружностей, проходят через одну точку. Эту точку называют *радикальным центром* трёх данных окружностей.

8. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три общие хорды пар данных окружностей проходят через одну точку.

9. Постройте с помощью циркуля и линейки радикальную ось двух
   а) пересекающихся окружностей;
   б) непересекающихся окружностей, ни одна из которых не лежит внутри другой;
   в) окружностей, одна из которых лежит внутри другой.

10. На сторонах BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты две произвольные точки M и N соответственно. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AM, BN, AB пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

Занятие 8. Выигрышные позиции

Рассматриваем игры, в которые играют два человека, поочередно совершая ходы. Правила симметричные, то есть игроки делают одинаковые ходы. Во всех задачах (кроме последней) проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Также предполагаем, что игра заканчивается через конечное число ходов (то есть рано или поздно один из игроков проигрывает).

1. В коробке лежат n спичек. За ход можно взять 1, 2, 3 или 5 спичек. Кто выиграет при правильной игре?

Определение. Разделим все возможные позиции в игре на *выигрышные* и *проигрышные* следующим образом:

- позиции, из которых нельзя сделать ход ("терминальные"), являются проигрышными;
- если из позиции можно сделать ход, после которого получится проигрышная позиция, то она выигрышная, а если такого хода сделать нельзя, — проигрышная.

2. Докажите, что все позиции рассматриваемых нами игр можно однозначно поделить на выигрышные и проигрышные: если начальная позиция выигрышная, то выигрышная стратегия существует у первого игрока, а если проигрышная, то у второго.

3. На шахматной доске стоит ферзь, которым разрешено ходить только влево, вниз или по диагонали влево-вниз. Найдите все проигрышные позиции.

4. В двух кучках лежат m и n камней. За ход можно брать один камень из любой кучки или по одному камню из каждой. Кто выигрывает при правильной игре?

Определение. Для каждой позиции в игре определим её *число Гранди* (SG) следующим образом: число Гранди позиции — это минимальное целое неотрицательное число, не совпадающее ни с одним из чисел Гранди тех позиций, которые можно получить из данной за один ход.

5. Докажите, что число Гранди терминальной позиции равно нулю.
   Докажите, что в любой игре вида (*) можно однозначно найти числа Гранди всех позиций.
   Докажите, что если число Гранди начальной позиции равно 0, то выигрывает второй игрок, иначе — первый.

6. Найдите числа Гранди всех позиций в задачах 1 и 3.

Определение. XOR-суммой x (+) y двух целых неотрицательных чисел x и y будем называть число, полученное следующим образом: представим x и y в двоичной системе счисления; каждый двоичный разряд XOR-суммы будет равен 1, если ровно у одного из чисел x и y в этом разряде 1, и 0 — если оба равны 0 или оба — 1. Другими словами, XOR-сумма представляет собой сложение в двоичной системе счисления без переносов в следующий разряд. (Обозначение (+) не является общепринятым. Чаще пишут плюс в кружочке или как-нибудь ещё. Мы используем обозначение (+) из-за того, что (+) легко набрать на клавиатуре компьютера.)

7. Вычислите а) 3 (+) 2; б) 5 (+) 7; в) 170 (+) 85.

Теорема. Пусть есть две игры. Каждый ход игрок может сделать либо в одной из этих игр, либо в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Каждая позиция в этой составной игре есть пара (p,q), где p — текущая позиция в первой игре, а q — во второй. Тогда SG((p,q)) = SG(p) (+) SG(q).

8. Докажите эту теорему.

9. Есть два коробка. В каждом по 70 спичек. Из первого можно брать 1 или 2 спички за ход, а из второго — 1, 2 или 3 спички за ход. Кто выигрывает?

10. В кучке а) 13; б) 15 камней. Каждым ходом игрок может разбить на две кучки любую кучку, в которой есть хотя бы три камня. Кто выигрывает?

11. Есть три кучки камней. За ход можно брать любое количество камней из какой-либо одной кучки. Тот, кто не сможет сделать ход, считается выигравшим. Найдите все выигрышные позиции.

Занятие 10. Принцип Дирихле

1. Из первых 2003 целых чисел (от 1 до 2003) выбрано 1003 числа. Докажите, что среди выбранных чисел найдется пара таких, что одно из них делится на второе.

2. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В каждой клетке написано одно из чисел 1, 2, 3, ..., 70. Докажите, что существуют четыре различные клетки, центры которых A, B, C, D являются вершинами параллелограмма, а сумма чисел в клетках с центрами A и C равна сумме чисел в клетках с центрами B и D.

3. Разрежьте квадрат на остроугольные треугольники.

4. Можно ли кубик со стороной 1 завернуть в квадратный кусок бумаги со стороной 3?

5. Пусть E — точка внутри выпуклого многоугольника. Докажите, что существует хотя бы одна сторона многоугольника (обозначим ее A_kA_{k-1}), что основание перпендикуляра, опущенного на эту сторону из точки E, принадлежит A_kA_{k-1}.

6. В некоторых клетках таблицы 65×5 нарисованы снежинки. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, что во всех девяти клетках на их пересечении есть снежинки, либо все эти клетки пусты.

7. Снеговики составляли новогодние подарки (из конфет разных сортов). Будем говорить, что подарок снеговика А «больше» подарка снеговика Б, если общее количество конфет тех сортов, которые встречаются у них обоих, у снеговика А больше, чем у снеговика Б. Докажите, что снеговиков можно занумеровать так, что у каждого n-го подарок не меньше, чем у $(n + 1)$-го.

8. В треугольнике известны длины двух сторон. Какой должна быть третья сторона, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

Занятие 11. Окрестность фигуры

1. В квадрат со стороной 1 бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

2. Внутри квадрата площади S расположено 2003 фигуры, суммарная площадь которых больше $2002S$. Докажите, что в этом квадрате найдётся точка, накрытая всеми 2003 фигурами.

Определение. Расстоянием от точки A до фигуры F называют наименьшее из расстояний (точнее, точную нижнюю грань расстояний) от точки A до точек фигуры F.

3. Найдите расстояние от начала координат до квадрата с вершинами $(^3/_2;0)$, $(^5/_2;1)$, $(^3/_2;2)$, $(^1/_2;1)$.

Определение. Окрестностью радиуса R (или R-окрестностью) плоской фигуры Φ называют множество всех точек плоскости, расстояние от которых до фигуры Φ меньше R.

4. Докажите, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 450 точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя из них было больше 1.

5. Дан выпуклый многоугольник площади S и периметра P. Найдите площадь его R-окрестности.

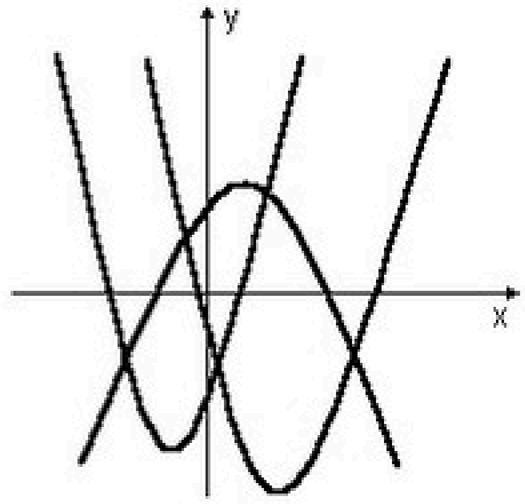
6. В прямоугольник 20×25 бросили а) 120; б) 130 единичных квадратов. Докажите, что в этот прямоугольник ещё можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

7. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $^S/_P$.

Занятие 12. Парабола

Параболой называют график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где a не равно 0.

1. Лёша нарисовал на доске три параболы. Таня утверждает, что уравнения этих парабол $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$, $y = c^2 + ax + b$ в каком-то порядке. Может ли это быть правдой при некоторых a, b и c?



2. Известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни.

3. Существуют ли четрые таких квадратных трёхчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трёхчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?

4. Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(x)) = 0$ иметь корни 1, 4, 9, 16?

5. а) Графики функций $y = x^2 - 2003$ и $y = 5x$ пересекаются в точках A и B. Найдите координаты середины отрезка AB.
   б) Пусть теперь изображена парабола $y = x^2$, но координатные оси не нарисованы. С помощью циркуля и линейки постройте какую-нибудь прямую, параллельную оси параболы.
   в) В условиях предыдущей задачи восстановите координатные оси.

6. а) Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и данной точки, не лежащей на этой прямой, всегда является параболой. Эти прямая и точка называются *директрисой* и *фокусом* параболы соответственно.
   б) Пусть парабола задана уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Найдите её директрису и фокус.

7. Нарисованы директриса и фокус параболы, а сама парабола не нарисована. Нарисован также некоторый круг. С помощью циркуля и линейки определите, пересекает ли парабола круг, и, если да, постройте хотя бы одну их общую точку.

Занятие 13. Неравенства

1. Докажите неравенство треугольника: сумма длин любых двух сторон треугольника больше длины третьей стороны.

2. Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то

   $2(ab + bc + ac) > a^2 + b^2 + c^2$.

3. Докажите неравенство

   $a^2 + b^2 > c^2/2$,

   где a, b, c — длины сторон некоторого треугольника.

4. Докажите теорему: для треугольника со сторонами a, b и c существуют такие положительные числа x, y и z, что $a = y + z$, $b = x + z$ и $c = x + y$.

5. Выразите x, y и z через стороны треугольника.

6. Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b, c выполнено неравенство

   $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$.

7. Выразите площадь S, полупериметр p, радиусы R и r описанной и вписанной в треугольник окружности через соответствующие числа x, y и z.

8. Докажите, что для треугольника со сторонами a, b, c выполнено неравенство

   $a^2 + b^2 + c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \geq 4 \cdot (3)^{1/2}S$.

9. Докажите, что для треугольника со сторонами a, b и c выполнено неравенство

   $1/(p - a)^2 + 1/(p - b)^2 + 1/(p - c)^2 \geq 1/r^2$.

10. Докажите, что для треугольника со сторонами a, b и c выполнено неравенство

    $p^{1/2} < (p - a)^{1/2} + (p - b)^{1/2} + (p - c)^{1/2} \leq (3p)^{1/2}$.

11. Сформулируйте утверждение, обратное к теореме 4. Докажите или опровергните его.

Занятие 14. Охота на зайцев

— Стойте! — кричал заяц. — Вы задержаны!
— Ничего мы не задержаны! — отвечали жулики. — Мы вот они — бежим.
— Эх! — на ходу крикнул Шпиль Куполу. — Жаль, мы наш пистолет из дому не захватили, тот, что под подушкой.
— Слышите?! — крикнул на бегу контролёр зайцу. — Пистолет под подушкой. Жаль, они не захватили. Вы бы его отняли, мы бы крикнули: "Стой! Стрелять будем!" Они бы остановились. А так убегают. — Ничего, — отвечал заяц на бегу. — Может, догоним.
— Фигушки! — крикнули жулики и кинулись в разные стороны. Контролёр и заяц побежали за Куполом. Потом передумали и — за Шпилем. Снова передумали — за Куполом. А потом Шпиль и Купол уже убежали, и контролёр с зайцем остались вдвоем.
— Надо было, — сказал заяц, — вам бежать за пухлым, а мне за щуплым. Или наоборот.
— Знаете, — застенчиво улыбнулся контролёр, — не хотелось бросать вас в трудную минуту. Куда вы бежали, туда и я.
— Если честно, – признался заяц, — мне тоже не хотелось. Так недавно познакомились, а уже надо разбегаться в разные стороны. Обидно.
— Не огорчайтесь, — сказал контролёр, — они в следующий раз попадутся.
— Конечно, попадутся! — усмехнулся заяц. — Жулики всегда попадаются. Рано или поздно. Это закон природы.

1. Заяц живет в одиннадцатикомнатной клетке, представляющей собой полоску 11×1. Злой охотник желает убить зайца из ружья. Охотник не видит, где находится заяц, но за каждый выстрел может поразить любую комнату на свой выбор. Испуганный заяц, если ещё остался жив, после каждого выстрела тихо переползает в соседнюю по стороне комнату. Сможет ли охотник убить зайца?

2. а) Заяц живёт в девятикомнатной клетке, представляющей собой квадрат 3×3. Злой охотник желает убить зайца из трёхствольного ружья. Охотник не видит, где находится заяц, но за каждый выстрел может поразить любые три комнаты на свой выбор. Испуганный заяц, если ещё остался жив, после каждого выстрела тихо переползает в соседнюю по стороне комнату. Сможет ли охотник убить зайца?
б) Тот же вопрос, если у охотника двуствольное ружье.
в) Тот же вопрос, если квартира зайца представляет собой квадрат $n \times n$, а у охотника k-стволка, где $k > n/2$.

3. Заяц задумал целое число от 1 до 100. Контролёр пытается его угадать. Если число названо правильно, заяц говорит: «Угадал!» Если нет, то заяц число меняет: делит на названное контролёром, если делится нацело, иначе умножает на число контролёра и прибавляет единицу (ничего не сообщая контролёру). Докажите, что контролёр сможет узнать загаданное зайцем изначально число.

4. Али-Баба хочет проникнуть в Сезам. Перед входом в пещеру установлен барабан с четырьмя отверстиями (расположенными в вершинах квадрата), внутри каждого из которых находится кувшин с селёдкой внутри. Селёдка может лежать в кувшине либо хвостом вверх, либо вниз. Али-Баба может засунуть руки в любые два отверстия и, почувствовав, каким образом там лежат селёдки, положить их там произвольным образом. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, в какие отверстия он засовывал руки до этого. Сезам откроется в тот момент, когда все четыре селёдки будут расположены одинаково. Как надо действовать Али-Бабе?

5. Боря задумал целое число, большее 100. Кира называет целое число, большее 1. Если Борино число делится на это число, Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа названное, и Кира называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее. Если Борино число станет отрицательным — Кира проигрывает. Есть ли у неё выигрышная стратегия?

Занятие 15. Варьирование

1. Пять деревень расположены на прямой дороге. Где надо выкопать колодец, чтобы сумма расстояний от него до деревень была минимальной?

2. Докажите, что любой отрезок, лежащий внутри треугольника, короче его наибольшей стороны.

3. Треугольник целиком содержится в параллелограмме. Докажите, что его площадь не превышает половины площади параллелограмма.

4. На плоскости расположены 17 точек и прямая, сумма расстояний до которой от всех точек меньше, чем до любой другой прямой. Докажите, что прямая проходит через одну из точек.

5. Докажите, что сумма площадей всех треугольников, отсекаемых от выпуклого пятиугольника его диагоналями, больше площади пятиугольника, но меньше его удвоенной площади.

6. Докажите транснеравенство: если $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ и $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, то для любой перестановки чисел второго набора $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}$ выполнены неравенства

   $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n}$

   и

   $$a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n} \ge a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

7. Докажите методом варьирования неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (для положительных чисел): $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n \ge (a_1a_2 \ldots a_n)^{1/n}$.

8. В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого депутата в его палате будет не более одного врага.

9. В графе n вершин. Степень каждой не превосходит 5.
   а) Докажите, что его вершины можно покрасить в 2 цвета так, чтобы не более n рёбер соединяли вершины одного цвета.
   б) Докажите, что его вершины можно покрасить в 3 цвета так, чтобы не более $n/2$ рёбер соединяли вершины одного цвета.

Занятие 16. Разные задачи

1. Острова A и $Б$ расположены на реке в 10 км друг от друга. На что пароходу потребуется больше времени: проплыть от A до $Б$ и обратно или проплыть 20 км по озеру?

2. В дугу AB вписана ломаная AMB, причём $AM > MB$. Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$.

3. В строго возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно сумме каких-то двух предшествующих. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел.

4. Пусть различные числа в прямоугольной таблице $n \times n$ в каждой строке стоят в порядке возрастания. Докажите, что если в каждом столбце переставить их в порядке возрастания, то по-прежнему в каждой строке они будут стоять в порядке возрастания.

5. На плоскости дано n точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует не менее $(n - 1)(n - 2)/2$ треугольников с вершинами в этих точках.

6. Построить треугольник по двум сторонам и расстоянию между основаниями высоты и медианы, опущенными на третью сторону.

7. Имеется 64 монеты, причём известно, что любые две монеты различаются по весу.
   а) За 94 взвешивания на двухчашечных весах без гирь найдите самую тяжёлую и самую лёгкую монеты.
   б) За 68 взвешиваний найдите две самые тяжёлые монеты.

Занятие 17. Баллада о выпуклых многоугольниках

Цель: выяснить, при каких n найдётся выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников.

1. Докажите, что в вершине выпуклого многоугольника M могут сходиться не более двух правильных многоугольников. Какие это многоугольники?

2. Докажите, что если правильный k-угольник, где $k \geq 6$ примыкает к вершине многоугольника M, то две его смежные с этой вершиной стороны идут по сторонам M.

Правильный многоугольник, участвующий в разбиении M, назовём хорошим, если хотя бы одна его вершина является вершиной многоугольника M.

3. Докажите, что правильный k-угольник при $k > 6$ не может быть хорошим. Убедитесь в том, что если M разбит на хорошие многоугольники, то его можно разбить на T треугольников, K квадратов и Π пятиугольников.

4. Докажите, что вершина пятиугольника (будем обозначать пятиугольник буквой Π) не может быть внутренней точкой стороны ни многоугольника M, ни какого-либо многоугольника разбиения.

5. Докажите, что вершина Π не может быть внутренней точкой M. Другими словами, все вершины Π являются вершинами M.

6. Докажите, что многоугольники разбиения могут примыкать только к несмежным сторонам хорошего пятиугольника.

Пусть AB — сторона хорошего пятиугольника P, к которой примыкают ещё какие-то многоугольники разбиения. Пусть AA_1 и BB_1 стороны многоугольника M (не являющиеся сторонами P; возможно, что $A_1 = B_1$). Обозначим C точку пересечения AA_1 и BB_1.

7. Докажите, что многоугольники разбиения, лежащие внутри треугольника ABC, являются треугольниками.

8. Докажите, что если A_1 и B_1 не совпадают, то у M углы при вершинах A_1 и B_1 равны по 120°.

9. Докажите, что если A_1 и B_1 не совпадают, то A_1B_1 — сторона M.

10. Докажите, что если среди хороших многоугольников найдётся пятиугольник, то M имеет не более 9 сторон (то есть $n \leq 9$).

11. Докажите, что M имеет не более 12 сторон.

12. Приведите примеры M с числом сторон 3, 4, ..., 11, 12.

Занятие 18. Жадный алгоритм

1. У продавца имеется набор n гирек весом a_1, a_2, ..., a_n. Известно, что вес первой гирьки равен 1, а вес каждой следующей не превосходит суммарного веса предыдущих. Докажите, что с помощью своих гирек продавец может взвесить любой вес от 1 до $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

2. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном 111-угольнике. После каждого своего хода игрок платит противнику число рублей равное количеству пересечённых диагоналей. Кто из игроков может заведомо не остаться в проигрыше?

3. В компьютерном классе имеется 50 компьютеров, которые нужно объединить в локальную сеть, затратив при этом как можно меньше провода (по суммарной длине). Системный администратор прелагает действовать следующим образом. Сначала соединит каждые два компьютера проводом, а затем будет перебирать все провода по длине — от самого длинного к самому короткому — и удалять очередной провод, если это не приводит к распаду сети.
   а) Докажите, что получится сеть с минимальной суммарной длиной проводов.
   б) Завхоз заявил, что после такой процедуры останется много обрезков, и что нужно действовать по-другому: выбирать на каждом шаге два самых близких компьютера и соединять их проводом, если между ними еще нет связи; затем следующие два, и так далее. Верно ли, что и в этом случае получится сеть с минимальной длиной проводов?

4. Есть набор гирек 1, 2, 3, ... , N г и чашечные весы. Двое играющих по очереди кладут на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. Выигрывает тот, после чьего хода установится равновесие. Может ли кто-нибудь из игроков всегда выигрывать независимо от игры противника?

5. На плоскости дан набор из 200 векторов. Двое по очереди берут себе по одному вектору, пока они не кончатся. Выигрывает тот, у кого длина суммы векторов окажется больше. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Имеется аудитория и список заявок на занятия в этой аудитории (в заявке содержится время начала и окончания предполагаемого занятия, эти интервалы времени вообще говоря перекрываются). Требуется составить расписание занятий так, чтобы было удовлетворено наибольшее число заявок. Как это проще всего сделать?

7. Дано n точек на координатной прямой. Нужно покрыть их наименьшим возможным количеством отрезков длины 1.

Пусть есть какая-то монетная система (например, в России используется система, состоящая из 1, 5, 10, 50 копеек) и требуется выплатить некую сумму этими монетами, выдав при этом наименьшее количество монет.

Жадный алгоритм выплаты определим так: чтобы выплатить N копеек, выдадим монету самого большого достоинства, не превосходящего N, а затем остаток (если он ненулевой) выплатим, применив для него жадный алгоритм.
Монетную систему назовём *удобной*, если выплата согласно жадному алгоритму является оптимальной по количеству выданных монет.

8. а) Докажите, что система монет 1, p, p^2,..., p^n является удобной для натурального p, большего 1.
   б) Докажите, что российская монетная система является удобной.
   в) Приведите пример неудобной монетной системы.

Занятие 19. «Дискретная непрерывность»

1. В ряд выложены 100 черных и 100 красных шаров, причём самый левый и самый правый шары чёрные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, чтобы среди них количество красных равнялось количеству чёрных.

2. Докажите, что в шестизначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась бы в промежутке от 0 до 9.

3. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде "налево" некоторые повернулись налево, некоторые - направо, а остальные - кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, что бы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

4. Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2\times2\times2$, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

5. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят $+1$ и -1, причём сумма всех чисел не больше 100 и не меньше -100. Докажите, что есть квадрат 25×25, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

6. За круглым столом сидит чётное количество гномов. У каждого на колпаке по несколько помпонов. Причём у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не более чем на 1. Докажите, что найдётся пара гномов, сидящих друг напротив друга, количества помпонов на колпаках которых отличаются не больше, чем на 1.

7. В посёлок ежедневно приходит не менее двух писем и не более трёх телеграмм. За январь прошлого года писем пришло больше, чем телеграмм, а за весь прошлый год в целом — наоборот. Докажите, что в прошлом году был день, в который количества писем и телеграмм, пришедших в поселок с начала года, совпадали.

9. Хоккейный матч Динамо–Спартак закончился со счетом 8:5 в пользу Динамо. Верно ли, что в ходе матча был момент, когда команда Динамо уже забросила столько шайб, сколько еще оставалось забросить Спартаку до конца матча?

10. В зале находятся *n* юношей и *n* девушек, причём не на одной прямой. Всегда ли можно провести по полу прямую черту так, чтобы в каждой из образовавшихся частей зала юношей и девушек было поровну (но не ноль)?

Занятие 20. Графы

1. В стране 2003 города. Из столицы выходит 203 дороги, из города Тьмутараканьска 3 дороги, а из всех остальных городов — по 20 дорог. Докажите, что из столицы можно попасть в Тьмутараканьск.

2. В некоторой стране столица соединена дорогами со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен дорогами ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно попасть в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину дорог, ведущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой сохранится.

3. Между 40 городами существует 742 двусторонние авиалинии (любая авиалиния соединяет два города, никакие два города не соединены более, чем одной авиалинией). Докажите, что из любого города можно долететь до любого другого.

4. а) В областной думе 100 депутатов. За год работы каждый из них подрался не менее, чем с 51 коллегой. Докажите, что можно выбрать трех депутатов, из которых любые два уже подрались.
   б) Ещё через год оказалось, что кадый депутат подрался не менее, чем с 67 коллегами. Докажите, что можно выбрать четырёх депутатов, из которых любые два уже подрались.
   в) А ещё через год каждый депутат подрался не менее, чем с 76 коллегами. Докажите, что можно выбрать пять депутатов, из которых любые два уже подрались.

5. Пусть в думе всего N депутатов, причём каждый подрался более, чем с $(k - 2)N/(k - 1)$ коллегами ($k > 1$). Докажите, что тогда найдутся k депутатов, любые два из которых уже подрались.

6. а) Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
   б) Среди 17 человек любые два либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Докажите, что среди них найдутся либо трое друзей, либо трое врагов, либо трое незнакомых.
   в) Пусть $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 1$ для $n > 2$. Рёбра полного графа из $a_n + 1$ вершин раскрашены в n цветов. Докажите, что в этом графе есть одноцветный треугольник.

7. Докажите, что среди любых 10 человек есть либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.

8. Докажите, что среди любых 9 человек есть либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.