

**«ЛИЦЕЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ НА ПРИЗЫ БОРИСА
ДМИТРИЕВИЧА ЧЕБОТАРЕВСКОГО, КАНДИДАТА ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, АВТОРА ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКОВ»
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ БАЗОВЫХ И СРЕДНИХ ШКОЛ, ГИМНАЗИЙ.**

7 класс

1. Из железного прута можно сделать цепочку из 80 или из 100 звеньев. Во втором случае каждое звено окажется на 10 г легче, чем в первом. Сколько весит прут?
2. Многоугольник разрезали на два треугольника. Сколько вершин могло быть у многоугольника? Подтвердите свои ответы примерами.
3. Верно ли, что каждый год есть месяц, в котором 13 число является понедельником?
4. Выписали все натуральные числа от 1 до 2020. Сколько раз в этой записи встречается цифра 0?
5. Можно ли квадратную сетку 4×4 сложить, сгибая:
а) 8 проволок, длиной 5 каждая;
б) 5 проволок, длиной 8 каждая?

8 класс

1. Натуральные числа выписывают друг за другом: 12345.... Какая цифра записана на 2020-м месте?
2. Несколько натуральных чисел в сумме дают 20. Укажите, какие это числа, если известно, что их произведение наибольшее.
3. Какое наибольшее количество месяцев в году может содержать по 5 пятниц?
4. На доску выписали все числа от 1 до 125. Разрешается выбрать два числа из записанных, стереть их, а на доску записать по своему усмотрению сумму или разность этих чисел. Если повторить эти действия 124 раза, то на доске останется одно число. Может ли это быть число 2020?
5. От квадрата отрезали прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму углов, под которыми из трех оставшихся вершин квадрата видна линия разреза.

7 класс

7.1. Натуральные числа от 1 до 2021 выписали друг за другом, потом вычеркнули все числа, кратные 2. После этого вычеркнули все числа, кратные 5. Сколько чисел осталось невычеркнутыми?

Решение. Если вычеркивать только четные числа, то будет вычеркнуто каждое второе число. Таких чисел 1010.

Если вычеркивать только числа, кратные пяти, то было бы вычеркнуто каждое пятое число. Таких чисел 404.

Однако среди чисел, кратных пяти, половина — это числа четные, они вычеркнуты вначале. Поэтому после вычеркивания четных чисел останется вычеркнуть еще $404 - 202$ нечетных чисел, кратных пяти. Поэтому вычеркнуто $1010 + 202$, т.е. 1212 чисел, а невычеркнутых осталось $2021 - 1212$, т.е. 809 чисел.

Ответ. 809.

7.2. Найдите такие натуральные числа x , y и z , которые удовлетворяют равенству x

$$+ \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{7}.$$

Решение. Так как $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$ и $\frac{1}{y + \frac{1}{z}} < 1$, то $x = 4$ и $\frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{2}{7}$. Поэтому $y + \frac{1}{z} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$. А так как сумма — число не натуральное, то $z = 2$ и $y = 3$.

Ответ. $x = 4, y = 3, z = 2$.

7. 3. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} *** \\ \times *** \\ \hline 8 *** \\ + *** \\ \hline * 7 ** 2 \end{array}$$

Решение. Так как первое неполное произведение 8*** при делении на число, меньшее 9, дает в частном число четырехзначное, то цифра единиц во втором множителе — это цифра 9. Цифрой десятков в этом множителе является 0. Цифра сотен в первом множителе может быть либо 8, либо 9, т.к. если эта цифра меньше 8, то получить не менее 8000 в первом неполном произведении невозможно. Цифрой сотен во втором множителе может быть только цифра 1. Значит цифра 9 не может быть цифрой сотен в первом множителе, поскольку при сложении в этом случае получилось бы число шестизначное. Поскольку при умножении на 9 цифры единиц первого множителя

результат должен оканчиваться на 2, то эта цифра единиц — цифра 8. Таким образом, в произведении $8 \cdot 8 \cdot 109$ осталось определить только цифру десятков. Пробуем: $888 \cdot 9 = 7992 < 8000$. Поэтому цифрой десятков может быть только 9. Проверка показывает, что в этом случае никаких противоречий с условием нет.

Ответ. $898 \cdot 109$.

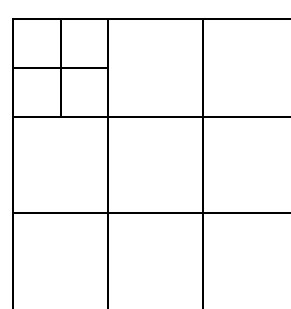
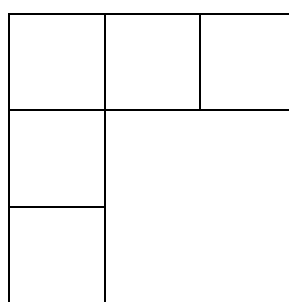
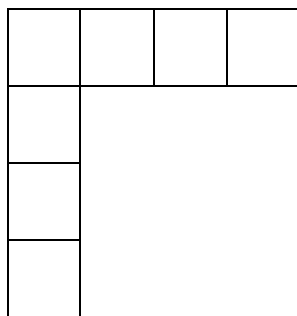
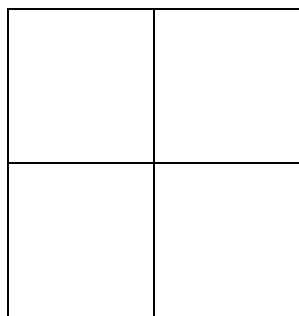
7.4. Продается мука в пакетах по 1, 3 и 5 кг. Можно ли купить 10 пакетов, которые содержат 25 кг муки?

Решение. Так как сумма десяти нечетных слагаемых есть число четное, а 25 — число нечетное, то сделать нужную покупку невозможно.

Ответ. Нельзя.

7.5. Покажите, как произвольный квадрат можно разрезать на 4, на 6, на 8, на 12 меньших квадратов.

Решение.



8 класс

8.1. Найдите шестизначное число, которое начинается с цифры 2 и увеличивается в 3 раза, если эту цифру 2 переставить с первого места в конец.

Решение. Пусть исходное 6-значное число записано цифрами $2xyztu$. Из условия следует, что после умножения этого числа на 3 получится число $xyztu2$. Произведение u на 3 оканчивается на 2 только при $u = 4$.

Теперь получаем, что после умножения цифры t на 3 и добавления 1 результат должен оканчиваться цифрой u , т.е. 4. Получается, что $t = 1$.

Далее находим, что $z = 7, y = 5, x = 8$.

Ответ. 285 714.

8.2. Найдите наименьшие натуральные числа m и k , удовлетворяющие условию
$$497m - 45k = 1.$$

Решение. Так как произведение $45k$ оканчивается цифрой 5 или цифрой 0, то произведение $497m$ должно оканчиваться цифрой 6 или цифрой 1, значит m должно оканчиваться цифрой 3 или цифрой 8. И, кроме того, разность $497m - 1$ делится на 9.

Будем постепенно увеличивать множитель m : 3, 8, 13, 18 и т.д. Получаем, что первое число m , для которого $497m - 1$ делится на 9, это число 23. Теперь находим $k = 254$.

Ответ. $M = 23, k = 254$.

8.3. Найдите все числа, которые втрое больше суммы своих цифр.

Решение. Пусть n — искомое число, $S(n)$ — сумма цифр числа n . Так как по условию $n = 3 \cdot S(n)$, то число n делится на 3, а значит и на 9, поскольку $S(n)$ также делится на 3.

Среди однозначных есть только одно число, кратное 9 — это 9. Но условие $n = 3 \cdot S(n)$ для $n = 9$ не выполняется.

Если число n — двузначное, то $S(n)$ не больше, чем $9 + 9$, т.е. 18. Поэтому следует испытать такие двузначные числа, которые не превосходят числа $18 \cdot 3$, т.е. числа 54. Для таких чисел $S(n) = 9, 3 \cdot S(n) = 27$.

Если число n — больше двузначного, например, k -значное и $k > 2$. Тогда $S(n)$ не больше, чем сумма k девяток, т.е. числа $9k$, число $3 \cdot S(n)$ не больше числа $27k$. Для трехзначных чисел получаем, что $3 \cdot S(n) \leq 3 \cdot 27 = 81$, а само число n не меньше 100. Значит, нет трехзначных чисел n , для которых $n = 3 \cdot S(n)$.

При увеличении на 1 количества знаков в числе n значение $3 \cdot S(n)$ увеличится не более, чем на 27, в то время, как для числа n граница увеличится в 10 раз: вместо 100 наименьшим будет число 1000. Так что при $k > 2$ разница между $3 \cdot S(n)$ и n будет становиться все больше. Поэтому равенство $n = 3 \cdot S(n)$ при $k > 2$ невозможно.

Ответ. 27.

8.4. Существуют ли два последовательных числа, сумма цифр каждого из которых кратна 7?

Решение. Если число оканчивается любой цифрой от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрой 9.

Если число оканчивающееся цифрой 9, в разряде десятков имеет любую из цифр от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр уменьшится на 8: вместо цифры 9 разряда единиц появится 0, а цифра десятков увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрами 99.

Если число оканчивающееся цифрами 99, в разряде сотен имеет любую из цифр от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр уменьшится на 19: вместо цифр 9 и 9 в разрядах единиц и десятков появятся цифры 0, а цифра сотен увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрами 999.

Если число оканчивающееся цифрами 999, в разряде тысяч имеет любую из цифр от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр уменьшится на 26: вместо цифр 999 в классе единиц появятся цифры 0, а цифра тысяч увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрами 9999.

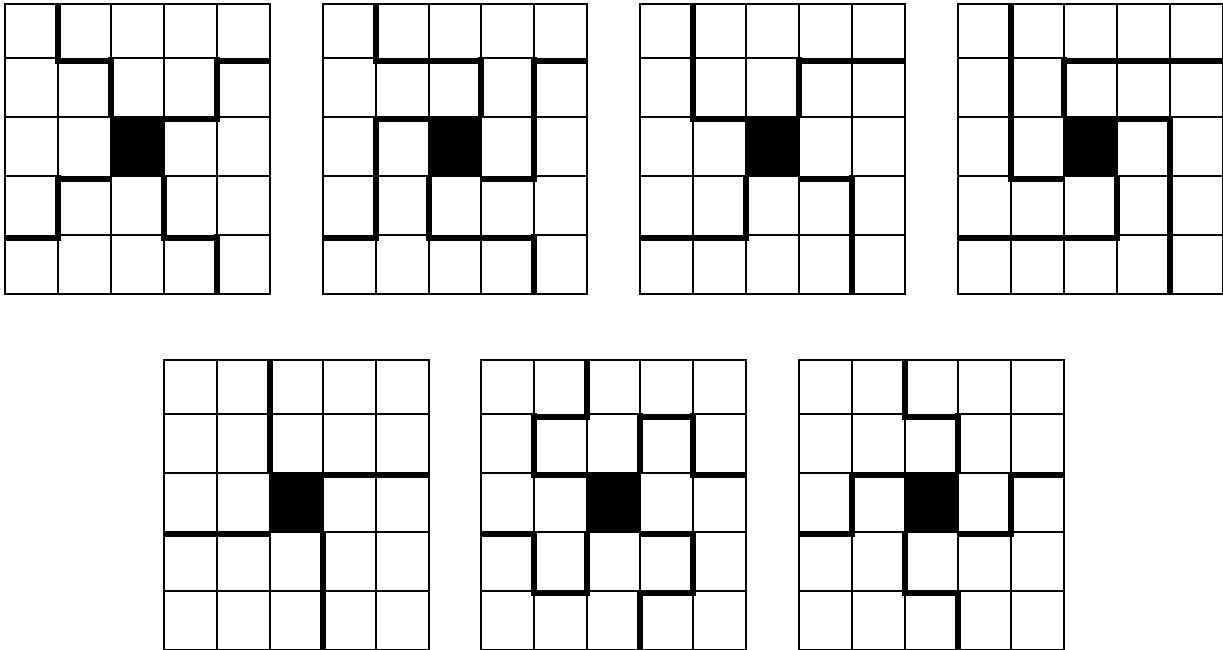
Так как при переходе к следующему числу вместо четырех цифр 9 появится четыре цифры 0, а цифра в разряде десятков тысяч (если это не 9) увеличится на 1, то сумма цифр изменится на 35. Поэтому если первое число имело сумму цифр, кратную 7, то и следующее будет обладать этим свойством. Например, числа 69 999 и 70 000.

Ответ. Существуют. Например, 69 999 и 70 000.

8.5. Из квадрата размерами 5 на 5 вырезали центральную клетку. Оставшуюся часть из 24 квадратиков нужно разрезать по линиям сетки на 4 равные части. Найдите как можно больше способов. Способы считаются разными, если после разрезов получаются не равные части.

Решение. Нужные части будут получаться, если использовать центрально-

симметричные разрезы. При этом достаточно рассмотреть разрезы, которые идут от первого или от второго слева верхних узлов на границе квадрата.



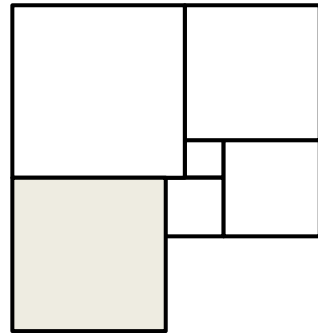
7 класс

7.1. Найдите наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр.

7.2. За два года завод снизил выпуск продукции на 51 %. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же количество процентов. На сколько?

7.3. У некоторого четырехугольника измерили длины четырех сторон и одной диагонали. Получили значения 10 см, 20 см, 28 см, 50 см, 75 см. Какой результат получили при измерении диагонали?

7.4. Фигура на рисунке составлена из шести квадратов. У самого маленького сторона равна 1. Найдите сторону левого нижнего квадрата.



7.5. У Веры есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Веры?

8 класс

8.1. У числа A подсчитали сумму цифр и получили число B . У числа B подсчитали сумму цифр и получили число B . Когда подсчитали сумму цифр у числа B , то и получили число 2. Числа A , B , B и 2 все различны. Найдите наименьшее возможное число A .

8.2. Число $\frac{1}{42}$ записали бесконечной десятичной дробью. Затем стёрли 2021-ю цифру после запятой. Выясните, полученная бесконечная десятичная дробь больше или меньше числа $\frac{1}{42}$.

8.3. На плоскости отметили пять точек: A, B, C, D, O . Оказалось, что углы AOB, BOC, COD равны между собой, а угол AOD втрое меньше каждого из них (все углы меньше развернутого). Какой может быть величина угла AOD ? Постарайтесь перечислить все возможные варианты.

8.4. Найдите наименьшее число, которое начинается с 2021 и делится без остатка на все однозначные числа.

8.5. На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить в две группы, которые друг от друга нельзя отделить никакой прямой.

9 класс

9.1. Числа от 1 до 2021 распределяют в несколько групп так, чтобы в одной группе не оказалось двух чисел, из которых одно вдвое больше другого. Какое наибольшее количество чисел может оказаться в одной группе?

9.2. Корнем квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа $\frac{c-a-b}{2a}$ и $\frac{a-b-c}{2a}$.

Докажите, что один из корней этого трехчлена по модулю равен 1.

9.3. В треугольнике ABC две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы этого треугольника.

9.4. Докажите, что если число $m^2 + 9mn + n^2$ при целых m и n делится на 11, то на 11 делится и число $m^2 - n^2$.

9.5. Футбольный мяч сшит из белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый шестиугольник сшит по трем своим сторонам с тремя белыми и тремя черными многоугольниками, а каждый пятиугольник — с пятью белыми многоугольниками. Всего использовано 32 многоугольника. Сколько среди них черных?

7 класс

7.1. Найдите наибольшее отношение трехзначного числа к сумме его цифр.

Решение. Имеем: $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = \frac{100(a+b+c)-90b-99c}{a+b+c} = 100 - \frac{90b+99c}{a+b+c}$.

Наибольшее значение последнее выражение принимает при $b=c=0$.

Ответ. 100.

7.2. За два года завод снизил выпуск продукции на 51 %. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же количество процентов. На сколько?

Решение. Пусть два года назад завод выпускал a единиц продукции, а ежегодное снижение выпуска составляло x %. Тогда после первого года снижения завод выпускал $a - a \cdot \frac{x}{100}$, т. е. $a \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = b$ единиц, а после второго года — выпускал $b \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$, т. е.

$a \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$ единиц. Так как по условию двухгодичное снижение составило 51 %, то

после второго года завод выпустил $a - a \cdot \frac{51}{100}$, т. е. $a \cdot \frac{49}{100}$ единиц. Поэтому $a \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 =$

$a \cdot \frac{49}{100}$. Получаем: $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{49}{100}$, $1 - \frac{x}{100} = \frac{7}{10}$, $\frac{x}{100} = \frac{3}{10}$ и $x = 30$.

Ответ. 30 %.

7.3. У некоторого четырехугольника измерили длины четырех сторон и одной диагонали. Получили значения 10 см, 20 см, 28 см, 50 см, 75 см. Какой результат получили при измерении диагонали?

Решение. После проведения диагонали в четырехугольнике получается два треугольника. В треугольнике длина большей стороны меньше суммы длин двух других сторон. Поэтому в треугольнике со стороной 75 см две другие стороны имеют длины 50 см и 28 см. Из трех значений 75 см, 50 см, 28 см одно, то, которое является длиной диагонали, должно быть длиной стороны другого треугольника и быть меньше суммы 10 см + 20 см. Таким является значение 28 см.

Ответ. 28 см.

7.4. Фигура на рисунке составлена из шести квадратов. У самого маленького сторона равна 1. Найдите сторону левого нижнего квадрата.

Решение. Пусть a — сторона среднего квадрата снизу. Тогда $a + 1$ — сторона правого квадрата снизу, $a + 2$ — сторона правого квадрата сверху, $a + 3$ — сторона левого квадрата сверху и $(a + 3) - (a - 1)$, т. е. 4 — сторона левого квадрата снизу.

Ответ. 4.

7.5. У Веры есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Веры?

Ответ. 3. Например, 8 коп, 3 коп и 1 коп.

8 класс

8.1. У числа A подсчитали сумму цифр и получили число B . У числа B подсчитали сумму цифр и получили число C . Когда подсчитали сумму цифр у числа C , то и получили число 2. Числа A , B , C и 2 все различны. Найдите наименьшее возможное число A .

Решение. Наименьшее число B , не равное 2, — это число 11. Тогда наименьшим из чисел B является число 29, а наименьшим из чисел A — число 2999.

Ответ. 2999.

8.2. Число $\frac{1}{42}$ записали бесконечной десятичной дробью. Затем стёрли 2021-ю цифру после запятой. Выясните, полученная бесконечная десятичная дробь больше или меньше числа $\frac{1}{42}$.

Решение. Делением находим, что $\frac{1}{42} = 0,0(238095)$. Так как $2021 - 1 - 6 \cdot 336 = 4$, то стёрли 4-ую цифру в периоде, т. е. цифру 0. Поэтому полученная бесконечная десятичная дробь больше исходной.

Ответ. больше.

8.3. На плоскости отметили пять точек: A, B, C, D, O . Оказалось, что углы AOB, BOC, COD равны между собой, а угол AOD вдвое меньше каждого из них (все углы меньше развернутого). Какой может быть величина угла AOD ? Постарайтесь перечислить все возможные варианты.

Решение. Если точки A, O, B отмечены на одной прямой, то при указанных условиях все углы имеют величину 0° .

Пусть теперь точки A, O, B не лежат на одной прямой и величина угла AOD равна x . Тогда величина каждого из углов AOB, BOC, COD равна $3x$. Указанные в задаче условия реализуются только тогда, когда сумма трех одинаковых углов отличается от полного угла на угол AOD .

Если $3 \cdot 3x = 360 - x$, то $x = 45$. А если $3 \cdot 3x = 360 + x$, то $x = 36$.

Ответ. $0^\circ, 45^\circ, 36^\circ$.

8.4. Найдите наименьшее число, которое начинается с 2021 и делится без остатка на все однозначные числа.

Решение. Наименьшее из чисел, которые делятся без остатка на все однозначные числа — это число 2520. Поэтому искомое число должно оканчиваться цифрой 0, а число десятков в этом числе должно делиться на 252. Находим, что $2021 = 252 \cdot 8 + 5$, и $202104 = 252 \cdot 802$. Это число наименьшее, поскольку 504 — наименьшее число, которое начинается с цифры 5 и делится на 252 без остатка. Поэтому искомое число — 2021040

Ответ. 2021040.

8.5. На плоскости отмечено 4 точки. Докажите, что их можно распределить в две группы, которые друг от друга нельзя отделить никакой прямой.

Решение. Если отмеченные точки — вершины выпуклого четырехугольника, то в каждую группу включим две диагональные точки. Если же отмеченные точки — вершины невыпуклого четырехугольника, то одну группу образуем из одной точки, которая лежит либо между какими-то двумя, либо внутри треугольника с вершинами в остальных точках

9 класс

9.1. Числа от 1 до 2021 распределяют в несколько групп так, чтобы в одной группе не оказалось двух чисел, из которых одно вдвое больше другого. Какое наибольшее количество чисел может оказаться в одной группе?

Решение. В одну группу поместим все нечетные числа (их 1011), все числа, кратные 4 и не кратные 8 (их $505 - 252$), все числа, кратные 16 и не кратные 32 (их $126 - 63$), все числа, кратные 64 и не кратные 128 (их $31 - 15$), все числа, кратные 256 и не кратные 512 (их $7 - 3$) и все числа, кратные 1024 (такое число одно). Все остальные

числа поместим во вторую группу. В первой группе будет всего $1011 + 253 + 63 + 16 + 4 + 1$ чисел, т. е. 1348 чисел. Больше чисел в одну группу поместить нельзя.

Ответ. 1348.

9.2. Корнем квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа $\frac{c-a-b}{2a}$ и $\frac{a-b-c}{2a}$.

Докажите, что один из корней этого трехчлена по модулю равен 1.

Решение. По теореме Виета $\frac{c-a-b}{2a} \cdot \frac{a-b-c}{2a} = \frac{c}{a}$, т. е. $(-b)^2 - (a-c)^2 = 4ac$, т. е. $b^2 = (a+c)^2 = 0$. Если $b = a + c$, то $\frac{c-a-b}{2a} = \frac{c-a-(a+c)}{2a} = -1$. Если же $-b = a + c$, то $\frac{a-b-c}{2a} = \frac{a+(a+c)-c}{2a} = 1$.

9.3. В треугольнике ABC две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Найдите углы этого треугольника.

Решение. Пусть из вершины A проведена высота длиной h_a к стороне длиной a , а из вершины B проведена высота длиной h_b к стороне длиной b . По условию $h_a \leq a$, $h_b \leq b$. А поскольку отрезок перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой, является кратчайшим из всех отрезков, соединяющих данную точку с этой прямой, то $h_a \leq b$, $h_b \leq a$. Тогда $ah_a \leq ab$, $bh_b \leq ab$ и, учитывая условие, $bh_a \leq ab$, $ah_b \leq ab$. Значит, $bh_a \leq ab \leq ah_a$, $ah_b \leq ab \leq bh_b$, $b \leq a$, $a \leq b$ и $a = b$. Теперь условие можно записать так: $h_a \leq b$, $h_b \leq a$. Это возможно только тогда, когда $h_a = b = a = h_b$, т. е. когда стороны AC и BC равны и сами являются высотами. Значит, треугольник ABC является равнобедренным и прямоугольным.

Ответ. 90° , 45° , 45° .

9.4. Докажите, что если число $m^2 + 9mn + n^2$ при целых m и n делится на 11, то на 11 делится и число $m^2 - n^2$.

Решение. Если на 11 делится число $m^2 + 9mn + n^2$, то делится и число $m^2 + 9mn + n^2 - 11mn$, т. е. число $(m-n)^2$, а, значит, и число $m-n$. Но в этом случае на 11 делится и произведение $(m-n)(m+n)$, т. е. число $m^2 - n^2$.

9.5. Футбольный мяч сшит из белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый шестиугольник сшит по трем своим сторонам с тремя белыми и тремя черными многоугольниками, а каждый пятиугольник — с пятью белыми многоугольниками. Всего использовано 32 многоугольника. Сколько среди них черных?

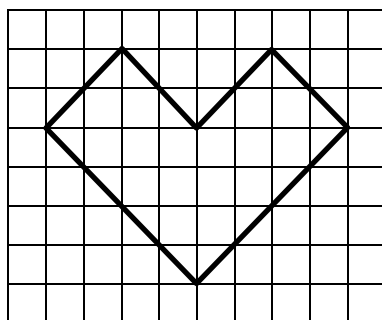
Решение. Пусть использовано x черных многоугольников и y белых. Чтобы из одного черного многоугольника перейти в соседний белый есть 5 возможностей, а всего таких переходов — $5x$. Чтобы из одного белого многоугольника перейти в соседний черный есть 3 возможности, а всего таких переходов — $3y$. Но $5x = 3y$. Значит $y = \frac{5}{3}x$ и,

учитывая, что $x + y = 32$, получаем, что $x + \frac{5}{3}x = 32$, откуда $x = 12$.

Ответ. 12.

7 класс

1. Два лесоруба, Никита и Павел, работали в лесу и сели завтракать. У Никиты было 4 лепешки, а у Павла — 7. Тут к ним подошел охотник. “Вот, братцы, заблудился в лесу, до деревни далеко, а есть очень хочется; поделитесь со мною хлебом-солью!” — “Ну что-ж, садись, чем богаты, тем и рады” — сказали Никита и Павел. 11 лепешек были разделены поровну на троих. После завтрака охотник пошарил в карманах, нашел гривенник и копейку и сказал: “Не обессудьте, братцы, больше при себе ничего нет. Поделитесь, как знаете!” Помогите лесорубам разделить эти 11 копеек по справедливости..
2. 2007 год — год вашего рождения — имеет такое свойство: меняя местами цифры числа 2007, нельзя получить меньшее четырехзначное число. Сколько лет будет вам в том году, когда это свойство повторится снова?
3. Можно ли в ребусе $\text{ШЕ} \cdot \text{СТЬ} + 1 = \text{СЕ} \cdot \text{МЬ}$ заменить буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство (разные буквы нужно заменять разными цифрами, а одинаковые буквы — одинаковыми цифрами)?
4. Как разрезать на 8 одинаковых частей изображенную фигуру?



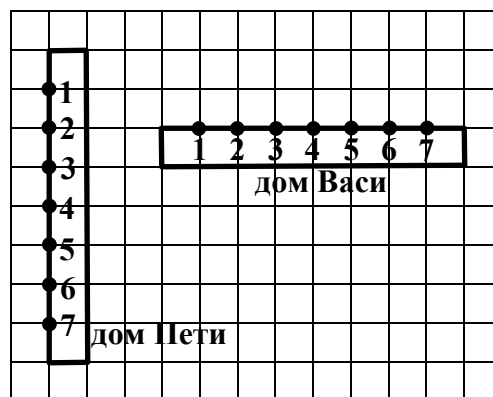
5. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в строчку нарисовано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер и как ему надо для этого играть, если вначале нарисовано:
а) 7 минусов; б) 8 минусов?

8 класс

1. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60 %. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20 %. А осенью посадили клены, и кленов стало снова 60 %. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

2. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план). Вася живет в четвертом

подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.



3. Покажите, как разрезать (не обязательно по линиям сетки) фигуру на рисунке 1 на три равные части, чтобы сложить из этих частей правильный шестиугольник, изображенный на рисунке 2. Оставляя дырки и накладывая части друг на друга нельзя.

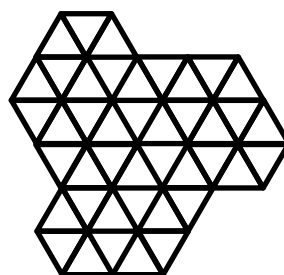


Рисунок 1

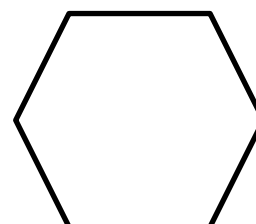


Рисунок 2

4. В саду растут яблони и груши — всего 7 деревьев (есть и яблони и груши). Ближе всех к каждому дереву растет дерево того же вида и дальше всех от каждого дерева растет дерево того же вида. Приведите пример того, как могут располагаться деревья в саду.
5. Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от 1 до 80 можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.

9 класс

1. Сумма цифр трехзначного числа, все цифры которого различны, кратна 7. Само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

2. Расстояние между A и B по шоссе равно 111 км. Между ними в 19 км от B расположен пункт C . Из A в B выезжает автомобиль и одновременно из B в A — велосипедист. Через час после выезда автомобиль был вдвое ближе к C , чем велосипедист. Еще через 5 минут велосипедист был в два раза ближе к C , чем автомобиль. Какова скорость автомобиля?

3. В записи числа $11\dots122\dots2$ использовано 2021 цифры 1 и 2021 цифры 2. Докажите, что это число является произведением двух последовательных натуральных чисел.

4. На чертеже отметили вершины и центр параллелограмма. Затем в каждом треугольнике с вершинами в этих точках отметили концы и середины медиан. Сколько всего оказалось отмеченных точек?

5. Шахматная доска имеет форму квадрата 8×8 , клетки которой поочередно закрашены в черный и белый цвета. Новая фигура “динозавр”, выставленная на доску, бьет все клетки противоположного цвета, не лежащие вместе с ним на одной вертикали, горизонтали или диагонали. В какую клетку нужно поставить “динозавра”, чтобы он бил как можно большее число клеток?