

8.1. Для каждого натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех его натуральных делителей, включая 1 и само число n .

Найдите все натуральные числа n такие, что $d(n) = d(n + 72) = 3$.

Ответ: 49 и 289.

Решение. Найдём все натуральные числа a , для которых верно равенство $d(a) = 3$. Если у a есть хотя бы 2 различных простых делителя, скажем p и q , то $1, p, q, pq$ – различные делители числа a , а значит, $d(a) \geq 4$. Поэтому искомые числа a являются степенями простых чисел. Пусть $a = p^u$ для некоторого простого числа p . Тогда $1, p, p^2, \dots, p^u$ – все возможные делители числа a . Таким образом $u = 2$, т. е. $a = p^2$.

Следовательно, в задаче требуется найти такие натуральные числа n , что $n = p^2$ и $n + 72 = q^2$, где p, q – простые числа. Вычитая из второго равенства первое, получаем $q^2 - p^2 = 72$, т. е. $(q - p)(q + p) = 72$. Заметим, что $q - p < q + p$, а ещё, что эти числа одной чётности. Рассмотрим все представления числа 72 в виде произведения двух натуральных чисел одной чётности (чётных, т.к. 72 чётно) – это $2 \cdot 36$, $4 \cdot 18$ и $6 \cdot 12$. В каждом из трёх случаев решим соответствующую систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} q - p = 2, \\ q + p = 36; \end{cases} & \begin{cases} 2q = 38, \\ q + p = 36; \end{cases} & \begin{cases} q = 19, \\ q + p = 36; \end{cases} & \begin{cases} q = 19, \\ p = 17; \end{cases} \\ 2. \begin{cases} q - p = 4, \\ q + p = 18; \end{cases} & \begin{cases} 2q = 22, \\ q + p = 18; \end{cases} & \begin{cases} q = 11, \\ q + p = 18; \end{cases} & \begin{cases} q = 11, \\ p = 7; \end{cases} \\ 3. \begin{cases} q - p = 6, \\ q + p = 12; \end{cases} & \begin{cases} 2q = 18, \\ q + p = 12; \end{cases} & \begin{cases} q = 9, \\ q + p = 12; \end{cases} & \begin{cases} q = 9, \\ p = 3; \end{cases} \end{array}$$

Только в первом и во втором случаях решения являются простыми числами, а значит, возможные значения n – это $17^2 = 289$ и $7^2 = 49$.

8.2. Существуют ли положительные действительные числа a , b и c такие, что каждое из чисел $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{2bc}$, $\sqrt{2ca}$ больше, чем $\frac{a+b+c}{2}$?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Предположим, такие действительные числа существуют. Поскольку условие симметрично относительно трёх переменных, без потери общности можно положить $a \geq b \geq c$. Тогда ввиду предположения из условия

$$\sqrt{2bc} > \frac{a+b+c}{2}.$$

Поскольку $a \geq b$, то $\frac{a+b+c}{2} \geq \frac{2b+c}{2} = b + \frac{c}{2}$. Таким образом, получаем, что

$$\sqrt{2bc} > \frac{a+b+c}{2} \geq b + \frac{c}{2},$$

откуда $\sqrt{2bc} > b + \frac{c}{2}$. Поскольку обе части данного неравенства больше 0, умножим его на себя (знак неравенства при этом сохранится). Получим

$$2bc > \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} + bc.$$

Отнимая $2bc$ их обеих частей, получим

$$0 > b^2 + \frac{c^2}{4} - bc = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2.$$

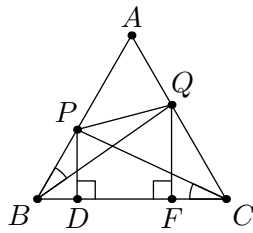
Но квадрат действительного числа не может быть меньше 0. Получено противоречие. Значит, исходное предположение неверно и таких чисел a , b , c не существует.

8.3. Площадь равностороннего треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки P и Q так, что выполняется равенство $\angle ABQ = \angle BCP$.

Найдите расстояние от середины отрезка PQ до прямой BC .

Ответ: $3/2$.

Решение. Согласно формуле площади равностороннего треугольника получаем, что $\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2 = 3\sqrt{3}$. Следовательно, $BC = 2\sqrt{3}$. Согласно



условию задачи $\angle ABQ = \angle BCP$, а значит, треугольники ABQ и BCP равны по второму признаку равенства треугольников. Пусть D и F — основания перпендикуляров, опущенных на сторону BC из точек P и Q соответственно. Так как $PDFQ$ — прямоугольная трапеция, то расстояние от середины её боковой стороны PQ до прямой DF равно длине средней линии, т. е. $(PD + QF)/2$. Запишем равенство площадей:

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{BQC} = S_{BCP} + S_{BQC} = \frac{BC \cdot PD + BC \cdot QF}{2}.$$

Значит, искомое расстояние равно $(PD + QF)/2 = S/BC = 3/2$.

8.4. По кругу выписаны n различных действительных чисел. Для каждого записанного числа x нашли количество чисел между x и ближайшим к нему по ходу часовой стрелки числом, не превосходящим x (так, например, для наименьшего выписанного числа найденное число равно $n - 1$, а для максимального числа — нулю).

Чему равно максимально возможное значение суммы всех найденных чисел?

Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Первое решение. Пронумеруем выписанные числа по ходу часовой стрелки, начиная с наименьшего. Пусть m_i — найденное число для числа с номером i . Тогда $m_n = 0$, $m_{n-1} \leq 1$, ..., $m_2 \leq n - 2$, $m_1 = n - 1$. Следовательно,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq 0 + 1 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Легко видеть, что если исходные числа расставлены в порядке возрастания (по ходу часовой стрелки, начиная с наименьшего), то сумма найденных значений действительно равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

Второе решение. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — записанные по кругу числа, упорядоченные по возрастанию. Для произвольной расстановки C чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ по кругу через $h_C(x_i)$ обозначим количество чисел, стоящих в расстановке C между x_i и ближайшим к нему по ходу часовой стрелки числом, не бóльшим x_i .

Рассмотрим все возможные расстановки чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и выберем такую расстановку C' , для которой сумма

$$h_{C'}(x_1) + h_{C'}(x_2) + \dots + h_{C'}(x_n)$$

максимальная. Докажем, что в расстановке C' числа упорядочены по возрастанию. Предположим противное. Без нарушения общности будем считать, что в расстановке C' числа расположены так, как показано на рисунке 1, т.е. числа $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ стоят в порядке возрастания,

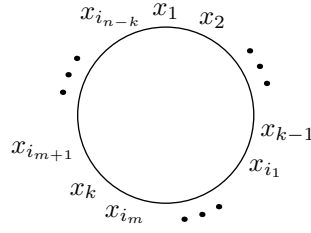


Рис. 1

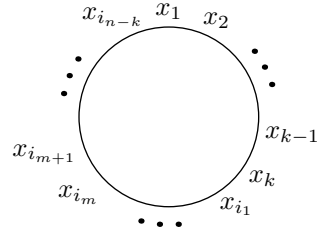


Рис. 2

а следующее за x_{k-1} число x_{i_1} больше чем x_k . Рассмотрим новую расстановку C'' (см. рис. 2), которая получена из C' лишь перестановкой числа x_k на место между x_{k-1} и x_{i_1} . Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} h_{C''}(x_1) &= h_{C'}(x_1), \quad \dots, \quad h_{C''}(x_{k-1}) = h_{C'}(x_{k-1}), \\ h_{C''}(x_{i_1}) &\geq h_{C'}(x_{i_1}), \quad \dots, \quad h_{C''}(x_{i_m}) \geq h_{C'}(x_{i_m}), \\ h_{C''}(x_{i_{m+1}}) &= h_{C'}(x_{i_{m+1}}), \quad \dots, \quad h_{C''}(x_{i_{n-k}}) = h_{C'}(x_{i_{n-k}}) \end{aligned}$$

и $h_{C''}(x_k) = h_{C'}(x_k) + m$. Поэтому,

$$h_{C''}(x_1) + h_{C''}(x_2) + \dots + h_{C''}(x_n) > h_{C'}(x_1) + h_{C'}(x_2) + \dots + h_{C'}(x_n)$$

Получено противоречие. Таким образом, в расстановке C' числа упорядочены по возрастанию, а значит, $h_{C'}(x_i) = n - i$. Значит,

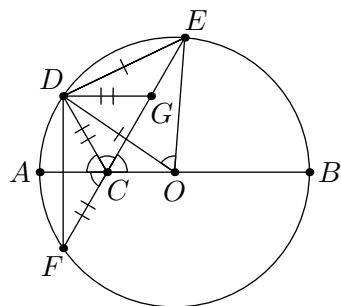
$$h_{C'}(x_1) + h_{C'}(x_2) + \dots + h_{C'}(x_n) = (n-1) + (n-2) + \dots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

9.1. На диаметре AB окружности ω отмечена точка C . На окружности ω выбраны точки D и E , лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB так, что $\angle ACD = \angle BCE = 60^\circ$, $CD = 3$ и $CE = 4$.

Найдите расстояние от точки C до центра окружности ω .

Ответ: 1.

Решение. Через O обозначим центр окружности ω , а через F – точку пересечения прямой CE с окружностью ω , отличную от точки E . Так как



$$\angle ACF = \angle BCE = \angle ACD,$$

то точки D и F симметричны относительно диаметра AB . Следовательно, $CD = CF$, а значит,

$$\angle CDF = \angle CFD = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ.$$

Так как $\angle DOE = 2\angle CFD = 60^\circ$ и $OD = OE$, то треугольник ODE правильный и в нём $DE = OD$ и $\angle ODE = 60^\circ$.

На отрезке CE отметим точку G такую, что $CG = CD$. Так как $\angle DCG = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$, то треугольник CDG правильный, а значит, $CD = DG$ и $\angle CDG = 60^\circ$. Следовательно,

$$\angle CDO = 60^\circ - \angle ODG = \angle EDG.$$

Поэтому треугольники ODC и EDG равны по первому признаку равенства треугольников, откуда находим $CO = EG = CE - CD = 1$.

9.2. Существует ли бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ натуральных чисел такая, что все её элементы попарно различны и для каждого натурального числа n верно равенство

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \dots + \frac{1}{a_{2n+1}}?$$

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такая последовательность (a_n) существует. Вычитая из равенства

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{2n+3}}$$

равенство

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \dots + \frac{1}{a_{2n+1}},$$

получаем, что $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{2n+2}} + \frac{1}{a_{2n+3}}$. Заметим, что, поскольку все числа последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ различны, то из последнего равенства следует, что $\min(a_{2n+2}, a_{2n+3}) < a_{n+1} < \max(a_{2n+2}, a_{2n+3})$. В частности, это означает, что для каждого члена последовательности, начиная со второго, есть меньший его член последовательности с бóльшим номером. Но тогда у последовательности $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел есть бесконечная убывающая подпоследовательность, что, очевидно, невозможно.

9.3. Найдите все тройки (a, b, c) попарно различных натуральных чисел, для которых числа $ab+3$, $bc+3$ и $ca+3$ можно расставить в один ряд слева направо так, что первое число будет делиться на второе, а второе – на третье.

Ответ: $(1, 9, 21)$ и все её перестановки.

Решение. Заметим, что если тройка (a, b, c) удовлетворяет условию задачи, то и все её перестановки также удовлетворяют ему. Поэтому, без потери общности считаем, что $a < b < c$. Тогда $bc+3 > ac+3 > ab+3$. Значит, числа должны быть записаны именно в таком порядке. Так как первое число делится на второе, то их разность $c(b-a)$ делится на второе число $ac+3$; аналогично, $a(c-b)$ делится на $ab+3$. Поскольку наибольший общий делитель чисел c и 3 не превосходит 3 , наибольший общий делитель чисел $ac+3$ и c не больше 3 . Значит, $3(b-a)$ делится на $ac+3$ и $3(c-b)$ делится на $ab+3$.

Так как числа a , b и c попарно различны, все их попарные разности ненулевые, а потому $3(b-a) \geq ac+3$ и $3(c-b) \geq ab+3$. Складывая эти два неравенства, получаем

$$3c > 3(c-a) \geq ac+ab+6 > ac,$$

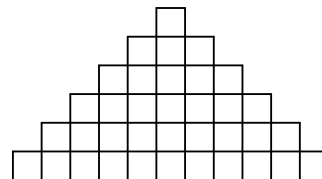
откуда $a \leq 2$. Рассмотрим два возможных значения a по отдельности.

Предположим, что $a = 1$. Тогда $b+3 \mid c+3 \mid bc+3$. Следовательно, на $b+3$ делится и разность $b(c+3) - (bc+3) = 3b-3$, и разность $3(b+3) - (3b-3) = 12$. Значит, $b+3$ – делитель 12 и, так как $b > 1$, то b равно 3 или 9 . Если $b = 3$, то неравенство $3(b-a) \geq ac+3$ равносильно $c \leq 3$, что невозможно, поскольку $c > b$. Если же $b = 9$, то неравенство $3(b-a) \geq ac+3$ равносильно $c \leq 21$. Так как $c > 9$ и $12 = b+3 \mid c+3$, то $c = 21$, что даёт нам искомую тройку $(1, 9, 21)$.

Предположим, что $a = 2$. Тогда $2b+3 \mid 2c+3 \mid bc+3$. Следовательно, на $2b+3$ делится и разность $b(2c+3) - 2(bc+3) = 3b-6$, и разность $3(2b+3) - 2(3b-6) = 21$. Значит, $2b+3$ – делитель 21 , причём $b > 2$, что возможно только при $b = 9$. Заметим, что число $2c+3$ также делит разность $b(2c+3) - 2(bc+3) = 3b-6 = 21$, т. е. $c \leq 9$, что противоречит неравенству $b < c$. Таким образом, этот случай невозможен.

9.4. В каждую клетку фигуры, изображённой на рисунке, необходимо записать 0 либо 1.

а) Найдите количество способов сделать это так, чтобы сумма чисел в каждом вертикальном ряду была нечётной, а в каждом горизонтальном – чётной.



б) Найдите количество способов сделать это так, чтобы сумма чисел в каждом вертикальном ряду была чётной, а в каждом горизонтальном – нечётной.

Ответ: **а)** 0; **б)** 2^{20} .

Решение. Горизонтальный ряд клеток будем называть строкой, а вертикальный ряд клеток – столбцом. В рассматриваемой фигуре 6 строк и 11 столбцов.

а) Если сумма чисел в каждом столбце нечётная, то и сумма чисел во всех клетках фигуры нечётная, так как количество столбцов нечётно. С другой стороны, если сумма чисел в каждой строке чётная, то и сумма всех чисел чётная. Следовательно, нельзя расставить числа требуемым способом.

б) Занумеруем строки снизу вверх числами от 1 до 6, а также занумеруем столбцы слева направо числами от 1 до 11. Расставим произвольным образом 0 либо 1 во все клетки фигуры за исключением клеток первой строки и шестого столбца. Количество способов заполнить эти 20 клеток равно 2^{20} . Так как сумма чисел в каждой строке должна быть нечётной, то пустые клетки, расположенные в строках с номерами от 2 до 6, заполняются однозначно. Так как сумма чисел в каждом столбце должна быть чётной, то клетки первой строки заполняются однозначно. Мы расставили числа 0 либо 1 в каждой клетки рассматриваемой фигуры так, что сумма чисел в каждом столбце чётная, а сумма чисел в каждой строке, кроме быть может первой, нечётная. Наконец, так как сумма всех чисел, посчитанная по столбцам, чётная, то и в первой строке сумма чисел нечётная.

10.1. Для произвольного натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех натуральных делителей числа n , включая 1 и само число n , а через $s(n)$ – сумму $d(1) + d(2) + \dots + d(n)$.

Найдите количество нечётных чисел среди $s(1), s(2), \dots, s(100)$.

Ответ: 55.

Решение. Числа $s(n-1)$ и $s(n)$ разной чётности тогда и только тогда, когда число $\tau(n)$ нечётно. Разложим число n на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$. Тогда $\tau(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_m)$. Поэтому $\tau(n)$ – нечётное число, если и только если все α_i чётны, т.е. n – квадрат натурального числа.

Выпишем все квадраты от 1 до 100: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Так как $s(1) = 1$ нечётно, то $s(n)$ нечётно, если и только если

$$n \in [1, 4) \cup [9, 16) \cup [25, 36) \cup [49, 64) \cup [81, 100).$$

Поэтому количество нечётных чисел в последовательности $s(1), s(2), \dots, s(100)$ равно $(4 - 1) + (16 - 9) + (36 - 25) + (64 - 49) + (100 - 81) = 55$.

10.2. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству

$$x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = \frac{3}{4}.$$

Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1} + xy$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Решение. Обозначим искомую величину $\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1} + xy$ за a и рассмотрим два равенства:

$$(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) = a + \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad (\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+1}-y) = a - \frac{3}{4}.$$

Заметим, что произведение левых частей этих равенств равно единице. Поэтому $\left(a + \frac{3}{4}\right)\left(a - \frac{3}{4}\right) = 1$, откуда находим $a^2 = \frac{25}{16}$, или $a = \pm\frac{5}{4}$.

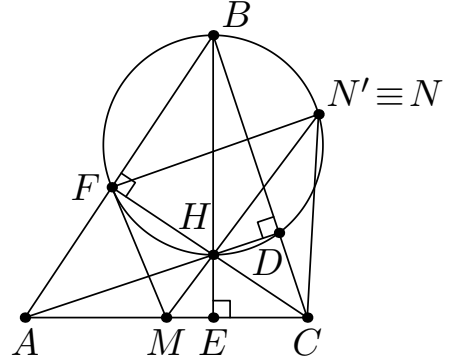
Учитывая, что $\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1} + xy > |xy| + xy \geq 0$, то число a положительно, значит, единственный возможный ответ: $a = \frac{5}{4}$. Подставляя в исходное равенство $y = 0$, находим решение $x = \frac{3}{4}$. Для этих чисел a равно $\frac{5}{4}$, т. е. это значение достигается.

10.3. В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC , а H – точка пересечения высот. Окружность с диаметром BH повторно пересекается в точке N с окружностью, которая проходит через H и касается прямой AC в точке C .

Докажите, что точки H , M и N лежат на одной прямой.

Первое решение. Пусть ω – окружность с диаметром BH , отрезки AD , BE и CF – высоты треугольника ABC и $MH \cap \omega = N' \neq H$. Нетрудно видеть, что точки F и D лежат на ω . Докажем, что описанная окружность треугольника CHN' касается прямой AC . Это будет означать, что точки N и N' совпадают. Так как $\angle FN'M = \angle FN'H = \angle FBH = \angle HCE = \angle FCM$, то четырёхугольник $FN'CM$ вписанный.

Из касания в точке C следует равенство $\angle CN'H = \angle HCM$, а из вписанности четырёхугольника $FN'CM$ – равенство $\angle CN'M = \angle CFM$. Поскольку M – середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника AFC , верно равенство $\angle CFM = \angle FCM$. Значит, $\angle CN'H = \angle CN'M$, откуда следует коллинеарность точек N , H и M .



10.4. На координатной плоскости xOy отмечено множество P точек (a, b) , для которых a, b – целые неотрицательные числа, не бóльшие 2023. Элементы множества P разбили на пары и в каждой паре точки соединили отрезком так, что никакие два построенных отрезка не пересекаются. Назовём отрезок *мелким*, если его длина равна 1.

Найдите минимальное возможное количество мелких отрезков.

Ответ: 2.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим отрезки с концами в точках вида $(0, y)$: $s_0, s_1, \dots, s_{2023}$ ($(0, i)$ – конец s_i). Пусть ни один из них не имеет длину 1. Тогда среди них нет вертикальных и коэффициент наклона прямой, содержащей s_{2023} , меньше 0. Индукцией по k покажем, что коэффициент наклона прямой, содержащей s_k , меньше 0 для всех $k \leq 2023$.

База $k = 2023$ проверена. Теперь пусть утверждение доказано всех $\ell > k$. Пусть коэффициент наклона прямой, содержащей s_k , больше нуля (он не 0, так как иначе найден отрезок длины 1). Так как коэффициент наклона прямой s_{k+1} меньше 0, то отрезок s_{k+1} должен иметь общую точку с прямой $y = k$, скажем A . Тогда второй конец отрезка s_k , отличный от $(0, k)$, должен иметь ординату больше k (раз коэффициент наклона больше 0) и при этом лежать строго внутри треугольника с вершинами $(0, k)$, $(0, k+1)$ и A (так как отрезки s_k и s_{k+1} не пересекаются). Но строго внутри этого треугольника вообще нет целочисленных точек. Противоречие. Значит, коэффициент наклона прямой s_k меньше 0.

Следовательно, для $k = 0$ получаем, что коэффициент наклона прямой, содержащей s_0 , меньше 0, что невозможно, так как все отрезки находятся в первой координатной четверти. Значит, среди отрезков, содержащих граничные точки (в данном случае с абсциссой 0), найдётся мелкий отрезок. Аналогично для точек с абсциссой 2023. Ясно, что два найденных мелких отрезка не могут совпадать, так как длина любого мелкого отрезка равна $1 < 2023$. Поэтому мелких отрезков хотя бы 2.

Пример. Индукцией по k покажем, что можно соединить точки требуемым образом в целочисленном квадрате $4k \times 4k$, причём так, чтобы два мелких отрезка были параллельны и одним из концов содержали угол

квадрата. База $k = 1$ приведена на рисунке 1.

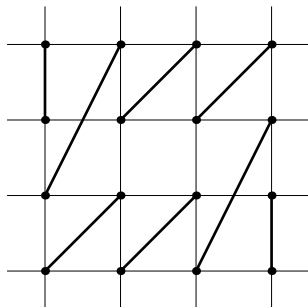


Рис. 1

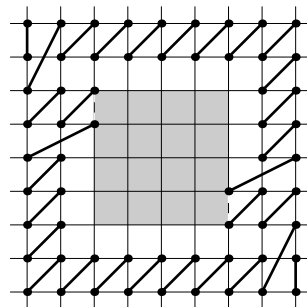


Рис. 2

Шаг индукции проиллюстрирован на рисунке 2 (серым цветом обозначен пример для меньшего k , а пунктиром – отрезки, которые надо убрать из этого примера).

11.1. Среди чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ есть ровно 1013 единиц и 1012 двоек. Может ли многочлен

$$P(x) = a_{2024}x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

иметь целый корень?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть z – целый корень уравнения $P(z) = 0$, тогда

$$a_{2024}z^{2024} + a_{2023}z^{2023} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0. \quad (*)$$

Поскольку $a_0 \neq 0$, то $z \neq 0$. Все слагаемые в левой части равенства (*), кроме последнего, кратны z и правая часть кратна z , поэтому, a_0 тоже кратно z . Но по условию a_0 равно 1 или 2. Значит, $z \in \{1, 2, -1, -2\}$. Так как все коэффициенты многочлена P положительны, то все его действительные корни отрицательны, в частности, $z \in \{-1, -2\}$.

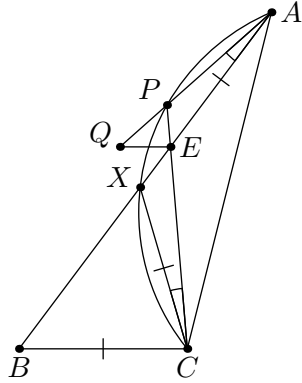
Пусть $z = -1$. Тогда, число $P(z)$ есть сумма или разность целых чисел, среди которых ровно 1013 нечётных. Значит, $P(z)$ нечётно, и следовательно, не равно 0. Поэтому -1 не является корнем многочлена P .

Если $z = -2$, то $a_0 = 2$. Разделим левую и правую части равенства (*) на 2. Все слагаемые до a_1z останутся чётными, а сумма $a_1z + a_0$ преобразуется в сумму $-a_1 + 1$. Значит, $a_1 = 1$ и тогда $a_1z + a_0 = 0$, поэтому можно просто откинуть два последних слагаемых в левой части равенства (*) и разделить полученное выражение в левой части на z^2 . Проделав так 1012 раз, получим, что $a_{2024}(-2)^{2024} = 0$, что неверно. Значит, многочлен P не может иметь целых корней.

11.2. На стороне AB треугольника ABC ($AB > BC$) выбрана точка E такая, что $AE = BC$. На продолжении луча CE за точку E нашлась точка P , для которой $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$. Точка Q лежит на луче AP так, что $AQ = CE$.

Докажите, что прямые EQ и BC параллельны друг другу.

Доказательство. Пусть описанная окружность треугольника ACP повторно пересекает прямую AB в точке X . Рассмотрим случай, когда точка X лежит на отрезке AB , а не на его продолжении (второй случай рассматривается по аналогии). Тогда



$$\angle CXB = 180^\circ - \angle CXA = 180^\circ - \angle CPA = \angle CBA.$$

Значит, $CX = CB = AE$. Кроме того, по условию $AQ = CE$, а из вписанности четырёхугольника $APXC$ имеем $\angle XAP = \angle XCP$. Значит, треугольники XCE и EAQ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,

$$\angle BEQ = 180^\circ - \angle AEQ = 180^\circ - \angle CXE = 180^\circ - \angle CPA = \angle ABC,$$

откуда $BC \parallel EQ$ из-за равенства накрест лежащих углов.

11.3. Найдите все тройки (x, y, z) натуральных чисел такие, что

$$14 \cdot 2^x + 5^y = 3^z.$$

Ответ: $(x, y, z) = (2, 2, 4)$.

Решение. Так как $14 \cdot 2^x + 5^y \equiv 1 \pmod{4}$, то и $3^z \equiv 1 \pmod{4}$, откуда заключаем, что z – чётное число, пусть $z = 2p$. Рассматривая остатки по модулю 7, находим, что число $3^z = 9^p$ может давать только остатки 1, 2 и 4, а число 5^y даёт такие остатки только при $y \equiv 0, 2, 4 \pmod{6}$, т. е. y тоже чётно, положим $y = 2q$.

Перенесём 5^{2q} в правую часть исходного равенства и разложим её на множители:

$$14 \cdot 2^x = (3^p + 5^q)(3^p - 5^q).$$

Числа $3^p + 5^q$ и $3^p - 5^q$ одной чётности, поэтому, либо: $3^p + 5^q = 2^r \cdot 7$ и $3^p - 5^q = 2^s$, либо $3^p + 5^q = 2^r$ и $3^p - 5^q = 2^s \cdot 7$, при некоторых натуральных r и s . Более того, числа $3^p + 5^q$, $3^p - 5^q$ не могут быть кратны 4 одновременно. Поэтому возможны 4 случая.

Случай 1) $3^p + 5^q = 14$ и $3^p - 5^q = 2^s$. Из первого равенства простым перебором находим единственное решение $(p, q) = (2, 1)$.

Случай 2) $3^p + 5^q = 2^r \cdot 7$ и $3^p - 5^q = 2$. Заметим, что $2^{r-1} \cdot 7 = \frac{3^p + 5^q}{3^p - 5^q} = 1 + \frac{2 \cdot 5^q}{3^p - 5^q} = 1 + 5^q$. Если $r > 2$, то левая часть делится на 4, в то время как правая часть даёт остаток 2 при делении на 4. Если $r = 1$ или $r = 2$, то несложно проверить, что натуральных решений нет.

Случай 3) $3^p + 5^q = 2$ и $3^p - 5^q = 2^s \cdot 7$. Так как p и q – натуральные числа, то первое равенство невозможно.

Случай 4) $3^p + 5^q = 2^r$ и $3^p - 5^q = 14$. Из этих равенств находим, что $3^p = 2^{r-1} + 7$. Если $r \geq 4$, то правая часть даёт остаток 7 по модулю 8, а левая часть может давать лишь остатки 1 или 3 по этому модулю. Значит, $r \leq 3$. Несложной проверкой убеждаемся, что $p = r = 2$. Но тогда, $5^q < 0$, что невозможно.

Значит, уравнение имеет единственное решение $(x, y, z) = (2, 2, 4)$.

11.4. Каждая клетка таблицы $n \times n$ окрашена в один из двух цветов – чёрный или белый, причём левая верхняя и правая нижняя клетки белые. Таблицу назовём *хорошей*, если в ней существует путь, начинающийся в левой верхней клетке, идущий по белым клеточкам и заканчивающийся в правой нижней клетке, причём в этом пути каждая следующая клетка находится правее или ниже предыдущей и имеет с ней общую сторону.

Для каждого $n \geq 2$ определите чётность количества хороших таблиц.

Ответ: количество хороших таблиц нечётно при $n = 2$ и $n = 3$ и чётно при всех $n \geq 4$.

Решение. Занумеруем числами от 1 до n строки таблицы сверху вниз, а столбцы – слева направо. Под клеткой (i, j) будем понимать клетку, стоящую на пересечении i -й строки и j -го столбца. В частности, нас интересуют пути из клетки $(1, 1)$ в клетку (n, n) . Заметим, что таблицы, симметричные относительно главной диагонали, соединяющей $(1, 1)$ с (n, n) , являются или не являются хорошими одновременно. Поэтому достаточно найти чётность количества хороших таблиц, которые симметричны себе.

Каждой хорошей симметричной таблице, у которой клетка $(1, n)$ чёрная, поставим в соответствие симметричную таблицу, которая отличается от этой только тем, что в ней клетки $(1, n)$ и $(n, 1)$ белые. Хорошие симметричные таблицы, оставшиеся без пар (назовём их *сложными*) – это такие таблицы, у которых клетки $(1, n)$ и $(n, 1)$ белые, но при их перекраске в чёрный цвет таблица перестанет быть хорошей. В такой таблице существуют ровно два требуемых пути: $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \dots \rightarrow (1, n) \rightarrow (2, n) \rightarrow \dots \rightarrow (n, n)$ и симметричный ему. При $n = 2$ и $n = 3$ такая таблица, как нетрудно видеть, единственна, значит, общее количество хороших таблиц нечётно.

Пусть теперь $n > 4$. Заметим, что в сложной таблице нет пути по белым клеткам, соединяющего $(1, 1)$ и $(n - 2, n - 1)$, так как его можно продолжить $(n - 2, n - 1) \rightarrow (n - 2, n) \rightarrow (n - 1, n) \rightarrow (n, n)$ до пути в (n, n) , что противоречит сложности таблицы. Аналогично, нет пути из $(1, 1)$ в $(n - 1, n - 2)$. Рассмотрим произвольную сложную таблицу, выберем в ней клетку $(n - 1, n - 1)$ и перекрасим в противоположный цвет. Поскольку эта клетка не лежит ни на одном из двух указанных путей, то, при её перекраске из белого цвета в чёрный, таблица останется сложной. Если же клетка $(n - 1, n - 1)$ была чёрной, то при её перекраске в белый цвет нового пути не появится, поскольку в $(n - 1, n - 1)$ можно перейти

только из $(n - 2, n - 1)$ и $(n - 1, n - 2)$, в которые пути нет. Следовательно, сложные таблицы разбиваются на пары отличающихся друг от друга только цветом $(n - 1, n - 1)$ -й клетки. Таким образом, при каждом $n > 4$ построено разбиение всех хороших таблиц на пары, что означает, что общее количество хороших таблиц чётно.

8.5. Друзья решили наполнить два бассейна. Для этого они использовали 4 шланга: 2 шланга типа A с одним напором, и 2 шланга типа B – с другим. Ровно в 10 часов они опустили шланги типа A в первый бассейн, а шланги типа B – во второй и включили воду. Через некоторое время они заметили, что в первом бассейне в полтора раза больше воды, чем во втором, и перенесли один шланг из первого бассейна во второй. В 13 часов один из друзей обратил внимание, что теперь во втором бассейне в полтора раза больше воды, чем в первом.

В какое время друзья переносили шланг во второй бассейн?

Ответ: в 11 часов.

Решение. Обозначим через a и b мощности шлангов типа A и типа B , т. е. эти шланги наполняют бассейн за $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ часов соответственно. Пусть шланг перенесли из первого бассейна во второй через t часов после включения. Через t часов в первом бассейне было $2at$ воды, а во втором – $2bt$. По условию верно равенство $2at = 1,5 \cdot 2bt$, откуда $a = 1,5b$. После переноса шланга до 13 часов осталось $3 - t$ часа. Значит, к 13 часам в первом бассейне набралось

$$2at + a(3 - t) = 3bt + 1,5b(3 - t) = 1,5bt + 4,5b$$

воды, а во втором –

$$2bt + (3 - t)(2b + a) = 2bt + (3 - t) \cdot 3,5b = 10,5b - 1,5bt.$$

Согласно условию верно равенство

$$1,5 \cdot (1,5bt + 4,5b) = 10,5b - 1,5bt.$$

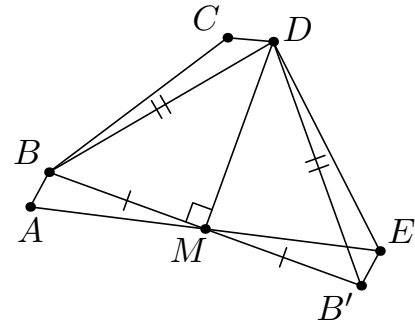
Раскрыв скобки и приведя подобные члены, находим, что $3,75bt = 3,75b$, следовательно, $t = 1$. Таким образом, шланг из первого бассейна перенесли во второй через час после начала, т. е. в 11 часов.

8.6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ угол при вершине C равен сумме углов при вершинах A и E , $AB = CD$ и $BC = DE$. Точка M – середина стороны AE .

Докажите, что угол BMD прямой.

Решение. Отметим точку B' , симметричную точке B относительно точки M . Диагонали четырёхугольника $ABEB'$ делятся их точкой пересечения пополам, поэтому этот четырёхугольник – параллелограмм. В частности, $B'E = AB = CD$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\angle DEB' &= \angle DEA + \angle AEB' = \\ &= \angle DEA + \angle EAB = \angle BCD.\end{aligned}$$



Следовательно, треугольники BCD и DEB' равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $BD = DB'$ и треугольник DBB' является равнобедренным. Отрезок DM – его медиана, проведённая к основанию. По свойству равнобедренного треугольника, она является и его высотой, откуда $\angle BMD = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

8.7. Дано натуральное число $n > 1$. Пусть a – наименьший делитель числа n , больший 1, а b – наибольший делитель числа n , меньший n . Известно что число $a^3 - a$ делится на b .

Найдите все возможные значения n .

Ответ: 6, 12 и числа вида p и p^2 , где p – произвольное простое число.

Решение. Число a простое как наименьший делитель, больший единицы. Рассмотрим разложение

$$a^3 - a = a(a - 1)(a + 1).$$

Так как a – наименьший простой делитель числа n , то число $a - 1$ взаимно просто с n и, в частности, с b . Если $a \neq 2$, то и число $a + 1$ взаимно просто с n , иначе у n был бы делитель $\frac{a + 1}{2}$, меньший a . Значит, a делится на $b = \frac{n}{a}$. Но число a простое, поэтому $\frac{n}{a}$ равно 1 или a . Эти два варианта дают ответы $n = a$ и $n = a^2$ соответственно.

Пусть теперь $a = 2$. Тогда число $b = \frac{n}{2}$ делит $a^3 - a = 6$. Случаи $b = 1$ и $b = 2$ дают ответы $n = 2$ и $n = 4$, случай $b = 3$ даёт ответ $n = 6$, а случай $b = 6$ даёт ответ $n = 12$.

Нетрудно видеть, что все найденные значения удовлетворяют условию задачи.

8.8. В каждую вершину куба записали некоторое натуральное число так, что есть ровно M рёбер, у которых суммы чисел, записанных в их концах, кратны трём.

Можно ли утверждать, что обязательно найдётся грань, у которой сумма чисел, записанных в вершинах, кратна трём, если

а) $M = 6$? **б)** $M = 7$?

Ответ: **а)** нет; **б)** да.

Решение пункта а) Рассмотрим куб в котором в двух противоположных вершинах: P и Q записаны двойки, а в остальных вершинах – единицы. Каждая из вершин P и Q является концевой в трёх рёбрах, причём эти тройки не пересекаются. Значит, ровно у шести рёбер сумма чисел, записанных в её концах будет равна $2 + 1 = 3$, а у шести других рёбер эта сумма будет равна $1 + 1 = 2$. Таким образом, у этого куба $M = 6$. При этом, у каждой грани ровно одна вершина совпадает с P или Q , поэтому, сумма чисел, записанных в вершинах, равна $1 + 1 + 1 + 2 = 5$ и не кратна трём.

Решение пункта б) Пусть дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Разобьём все его 12 рёбер на 6 пар, каждая из которых состоит из двух противоположных рёбер некоторой грани. Например, подойдут пары

$$(AB, CD), (BC, AD), (A_1 B_1, C_1 D_1), \\ (B_1 C_1, A_1 D_1), (AA_1, BB_1), (CC_1, DD_1).$$

По принципу Дирихле какие-то два из 7 рёбер, у которых суммы чисел, записанных в их концах, кратны трём, принадлежат одной паре. В грани, для которой эти рёбра противоположны, сумма чисел, записанных в её вершинах, равна сумме двух чисел, соответствующих данным рёбрам, и, следовательно, она кратна трём.

Третий этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика»
2023/2024 учебный год

9.5. Набор, состоящий из 27 гирек: по три массы 1 г, три массы 2 г, ..., три массы 9 г, разложили на 9 групп по три гирьки в каждой. При этом оказалось, что суммарные массы гирек в каждой из групп попарно различаются.

Найдите все возможные значения суммарной массы средней (пятой) по величине группы.

Ответ: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Решение. Докажем, что суммарная масса в пятой группе не меньше 11 и не больше 19. Обозначим суммарные массы гирек в группах через $a_1 < a_2 < \dots < a_9$.

В первых пяти группах находится 15 гирек, поэтому, суммарная масса $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ гирек в этих группах не меньше, чем сумма масс 15 самых лёгких гирек, т. е. $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 45$. Поскольку во всех группах суммарные массы различны, $a_5 \geq a_4 + 1$, $a_4 \geq a_3 + 1$, $a_3 \geq a_2 + 1$ и $a_2 \geq a_1 + 1$. Следовательно,

$$5a_5 \geq a_5 + (a_4 + 1) + (a_3 + 2) + (a_2 + 3) + (a_1 + 4) = 45 + 10 = 55,$$

откуда получаем, что $a_5 \geq 11$.

Аналогично, суммарная масса $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ гирек в пяти последних группах не больше, чем сумма $3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 105$. И так же получается неравенство

$$5a_5 \leq a_5 + (a_6 - 1) + (a_7 - 2) + (a_8 - 3) + (a_9 - 4) = 105 - 10 = 95,$$

откуда получаем, что $a_5 \leq 19$.

В таблице приведены разбиения гирек, которые показывают, что масса пятой группы может принимать все значения от 11 до 19.

гр. 1	гр. 2	гр. 3	гр. 4	гр. 5	гр. 6	гр. 7	гр. 8	гр. 9	масса 5 гр.
1,1,5	2,2,4	3,3,3	2,4,4	1,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	11
1,1,4	1,2,4	3,3,3	2,4,5	2,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	12
1,2,2	1,1,4	3,3,3	2,5,5	4,4,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	13
1,1,2	1,2,2	3,3,3	4,4,5	4,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	14
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	15
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,6	5,6,6	7,7,7	8,8,9	8,9,9	16
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,6,6	5,5,8	7,7,7	6,9,9	8,8,9	17
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,8	5,6,8	7,7,7	6,8,9	6,9,9	18
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,9	6,6,8	7,7,7	6,8,8	5,9,9	19

9.6. Найдите все пары (n, k) натуральных чисел, для которых можно провести в окружности n синих и k белых хорд так, чтобы все синие хорды пересекали различные количества белых хорд, а все белые хорды пересекали различные количества синих хорд.

Ответ: все (n, k) с модулем разности не больше 1.

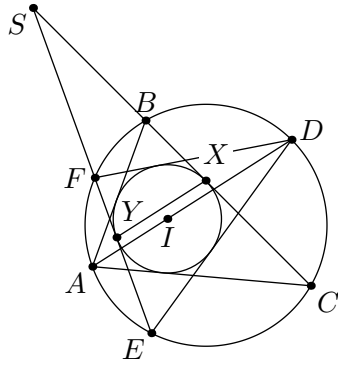
Решение. *Оценка.* Каждый синий отрезок может пересекать от 0 до k белых хорд, всего $k + 1$ вариант. По условию у каждой синей хорды это число разное, а значит вариантов $k + 1 \geq n$. Аналогично $n + 1 \geq k$, а значит модуль разности n и k не больше единицы.

Пример. Рассмотрим случай $n = k$. Синими сделаем хорды $A_i B_i$, а красными — $C_i D_i$. Возьмём на окружности точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n, B_n, B_{n-1}, \dots, B_2, B_1$ в указанном порядке. Теперь возьмём точки $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2, C_1$ на дуге $B_1 A_1$ (т.е. C_n ближе остальных к B_1), не содержащей точек A_i, B_i , в указанном порядке и точки D_{n-i} ($1 \leq i \leq n-1$), лежащие соответственно на дугах $B_i B_{i+1}$, не содержащих других точек. Наконец отметим точку D_n на дуге $A_n B_n$, не содержащей других точек. Таким образом, C_i и D_i по разные стороны от хорд $A_1 B_1, \dots, A_i B_i$ и по одну от остальных. Значит $C_i D_i$ пересекает ровно i синих хорд. Заметим, что для синих хорд ситуация симметрична (т.е., начиная построение с C_i и D_i , мы могли бы получить то же расположение). Примеры для $n = k + 1$ или $k = n + 1$ получаются из этого, если убрать $A_1 B_1$ или $C_n D_n$ соответственно, т.к. $A_1 B_1$ пересекает все белые хорды и для них число пересекаемых синих уменьшится на 1, и аналогично для $C_n D_n$.

9.7. Треугольники ABC и DEF вписаны в окружность Ω и описаны около окружности ω так, что прямая AD проходит через центр ω .

Докажите, что прямая, проходящая через точки касания окружности ω со сторонами BC и EF , параллельна прямой AD .

Первое решение. Без потери общности, пусть $AC > AB$. Также



пусть ω касается BC в точке X , а EF в точке Y . Счётом углов покажем, что прямые XY и AD образуют равные углы с прямой BC , откуда и будет следовать требуемое.

Во-первых, ясно, что

$$\angle(AD, BC) = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}). \quad (1)$$

Продлим BC и EF до пересечения в точке S . Ввиду того, что SX и SY – касательные к ω , получаем $SX = SY$, а значит,

$$\angle(XY, BC) = \angle SXY = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XSY. \quad (2)$$

С другой стороны, хорошо известно, что

$$\angle XSY = \angle(BC, EF) = \frac{1}{2}(\widehat{EC} - \widehat{BF}). \quad (3)$$

Обозначим $\alpha = \widehat{EC}$, $\beta = \widehat{BF}$, $\gamma = \widehat{AF}$ и $\delta = \widehat{CD}$. Тогда, раз AD проходит через центр ω , то AD – биссектриса угла BAC , посему $\widehat{BD} = \widehat{CD} = \delta$. Аналогично, DA – биссектриса угла FDE , посему $\widehat{AE} = \widehat{AF} = \gamma$. Из (1),

$$\angle(AD, BC) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta).$$

Из (2) и (3),

$$\angle(XY, BC) = 90^\circ - \frac{1}{4}(\alpha - \beta).$$

Тогда требуемое равенство $\angle(AD, BC) = \angle(XY, BC)$ равносильно

$$360^\circ - \alpha + \beta = 2\beta + 2\gamma + 2\delta \iff$$

$$\iff 360^\circ = \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta,$$

что верно потому что вся окружность 360° сложена из дуг градусных мер $\alpha = \widehat{CE}$, $\beta = \widehat{BF}$, $2\gamma = \widehat{EF}$ и $2\delta = \widehat{BC}$.

Второе решение. Обозначим точки касания ω с BC и EF через X и Y соответственно. Более того, пусть $S = EF \cap BC$, а I – центр ω . Тогда, поскольку ω вписана в угол $XS Y$, то $XY \perp SI$.

С другой стороны, по лемме о трезубце, D и A есть центры окружностей, описанных около треугольников BIC и EIF соответственно, ибо условие коллинеарности A, I, D явно влечёт, что D и A – середины соответствующих дуг Ω . Тогда, для двух этих окружностей с центрами A и D , а также Ω радикальным центром является точка S , лежащая на двух из трёх радикальных осей. Значит, она должна лежать и на третьей, то есть на радикали двух окружностей с центрами A и D и проходящими через I . Но раз эти окружности касаются в I , $SI \perp AD$.

Объединяя выводы двух абзацев, несложно заключить, что $XY \parallel AD$, что и требовалось.

9.8. Непустое множество S натуральных чисел назовём *особым*, если для любого его элемента a множество S содержит различные числа b и c , отличные от a , такие, что $a = 2023 \cdot \text{НОД}(b, c) + 1$.

Существует ли особое множество, в котором количество элементов

а) конечно; **б)** бесконечно?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) Докажем, что не существует конечного особого множества. Предположим противное. Пусть S – конечное особое множество. Несложно видеть, что каждый элемент множества S представим в виде $2023k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Выберем максимальный элемент $a = 2023x + 1$ множества S . Согласно определению особого множества, в S найдутся различные числа $b = 2023y + 1$ и $c = 2023z + 1$, отличные от a , такие, что

$$a = 2023 \cdot \text{НОД}(b, c) + 1, \quad \text{т.е.} \quad x = \text{НОД}(2023y + 1, 2023z + 1). \quad (1)$$

Следовательно, $2023y + 1 : x$ и $2023z + 1 : x$. Поэтому $2023(z - y) : x$ и $\text{НОД}(2023, x) = 1$, а значит, $(z - y) : x$. Так как $x > y$, $x > z$ и $y \neq z$, то $0 < |y - z| < x$ и последняя делимость невозможна – противоречие.

б) Пусть S – множество всех натуральных чисел, представимых в виде $2023k + 1$, где натуральное число k взаимно просто с 2023. Докажем, что множество S особое. Выберем произвольное число $a = 2023x + 1 \in S$ и покажем, что множество S содержит различные числа $b = 2023y + 1$ и $c = 2023z + 1$, отличные от a и удовлетворяющие равенствам (1).

Так как x и 2023 взаимно просты, то найдётся такое натуральное число, что $2023t + 1 : x$. Из китайской теоремы об остатках следует существование такого натурального числа y , что $y \equiv t \pmod{x}$ и $y \equiv 1 \pmod{2023}$. Тогда

$$2023y + 1 : x \quad \text{и} \quad \text{НОД}(y, 2023) = 1.$$

Рассмотрим элементы множества S , равные $b = 2023y + 1$ и $c = 2023z + 1$, где $z = 2023x + y$. Для них верны равенства

$$\begin{aligned} \text{НОД}(2023y + 1, 2023z + 1) &= \text{НОД}(2023y + 1, 2023(z - y)) = \\ &= \text{НОД}(2023y + 1, 2023^2x) = \text{НОД}(2023y + 1, x) = x. \end{aligned}$$

Следовательно, указанные числа $b, c \in S$ дают требуемое представление числа $a \in S$.

10.5. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . На стороне BC отметили точку P такую, что $\angle HPC = \angle BAC$.

Докажите, что центр описанной окружности треугольника BHP лежит на прямой AB .

Первое решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника BHP . По свойству центра описанной окружности,

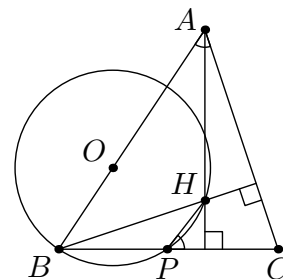
$$\begin{aligned}\angle OBP &= 90^\circ - \angle BHP = 90^\circ - (\angle HPC - \angle HBC) = \\ &= 90^\circ - \angle BAC + (90^\circ - \angle ACB) = \\ &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = \angle ABC.\end{aligned}$$

Из равенства $\angle OBP = \angle ABC$ следует, что точка O лежит на прямой AB .

Второе решение. Отметим точку H' , симметричную точке H относительно прямой AB . Хорошо известно, что H' лежит на описанной окружности треугольника ABC . Так как прямые CH и HH' обе перпендикулярны AB , точки C , H и H' лежат на одной прямой. Из вписанности четырёхугольника $AH'BC$ получаем равенства

$$\angle BH'H = \angle BH'C = \angle BAC = \angle HPC.$$

Значит, четырёхугольник $BRHH'$ вписан. Центр его описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку HH' – прямой AB . Осталось заметить, что описанные окружности треугольника BPH и четырёхугольника $BRHH'$ совпадают.



10.6. Найдите все пары (p, q) простых чисел, удовлетворяющих равенству

$$p^{2q+1} = q^p + 2023.$$

Ответ: $(2, 5)$.

Решение. Так как числа p^{2q+1} и q^p отличаются на нечётное число 2023, одно из них чётное, а другое – нечётное. По условию числа p и q простые, поэтому, чётное из них равно 2. Рассмотрим два варианта по отдельности.

Предположим, что $p = 2$. Тогда равенство из условия примет вид

$$2^{2q+1} = q^2 + 2023.$$

Число q нечётно, поэтому, можно применить малую теорему Ферма, из которой следует, что $2^{2q+1} \equiv 2^{2+1} = 8 \pmod{q}$. Значит, $8 \equiv 2023 \pmod{q}$, откуда вытекает, что q является делителем числа $2023 - 8 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Очевидно, что $2^{27} > 13^2 + 2023$ и $2^{63} > 31^2 + 2023$, а непосредственная подстановка показывает, что число $q = 5$ подходит: $2^{11} = 2048 = 5^2 + 2023$.

Предположим, что $q = 2$. Тогда равенство из условия примет вид

$$p^5 = 2^p + 2023.$$

Число p нечётно, поэтому, можно применить малую теорему Ферма, из которой следует, что $2^p + 2023 \equiv 2 + 2023 = 2025 \pmod{p}$. Значит, p является делителем числа $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Значение $p = 3$ не подходит, так как, очевидно, $3^5 = 243 < 2023$, а значение $p = 5$ не подходит, поскольку $5^5 = 3125 \neq 2055 = 2^5 + 2023$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет только найденная в первом случае пара $(2, 5)$.

10.7. В выпуклом n -угольнике провели несколько диагоналей так, что каждая проведённая диагональ пересекается во внутренних точках не более, чем с одной другой. В результате n -угольник разбился на меньшие многоугольники.

Определите, какое максимальное количество треугольников могло оказаться среди них.

Ответ: $2n - 5$ для нечётных n и $2n - 4$ для чётных n .

Решение. Обозначим искомое максимальное количество треугольников через $\Delta(n)$. Ясно, что $\Delta(3) = 1$ (в треугольнике нет диагоналей) и $\Delta(4) = 4$ (можно провести обе диагонали). Рассмотрим выпуклый n -угольник, $n \geq 5$. Проведём диагональ d , которая разделит его на четырёхугольник и $n - 2$ -угольник. Проводя диагонали, не пересекающие d , можно получить 4 треугольника в четырёхугольнике, и $\Delta(n - 2)$ треугольника в $n - 2$ -угольнике. Следовательно, $\Delta(n) \geq \Delta(n - 2) + 4$, откуда для нечётных n получается оценка $\Delta(n) \geq 4 \cdot \frac{n-3}{2} + 1 = 2n - 5$, а для чётных n получается оценка $\Delta(n) \geq 4 \cdot \frac{n-4}{2} + 4 = 2n - 4$.

Покажем при помощи метода математической индукции, что полученные оценки точны.

База индукции: $\Delta(3) = 1 = 2 \cdot 3 - 5$ и $\Delta(4) = 4 = 2 \cdot 4 - 4$.

Предположим, что для всех n от 3 до k верны значения $\Delta(n)$, указанные в ответе. Рассмотрим произвольный $k + 1$ -угольник M , в котором провели диагонали согласно условию задачи и получили $\Delta(k + 1)$ треугольников разбиения. Заметим, что по крайней мере одна проведённая диагональ d не пересекается ни с какой другой проведённой диагональю. Действительно, рассмотрим любую проведённую диагональ AB : если она ни с кем не пересекается, то является искомой, если же она пересекается с диагональю CD , то по крайней мере один из отрезков AC , AD , BC и BD является диагональю и не пересекается ни с какой проведённой диагональю, поэтому этот отрезок – искомая диагональ (она обязана быть проведённой из-за максимальной количества треугольников). Диагональ d разбивает $k + 1$ -угольник M на a -угольник и $k + 3 - a$ -угольник, значит,

$$\Delta(k + 1) \leq \Delta(a) + \Delta(k + 3 - a) \leq 2a - 4 + 2(k + 3 - a) - 4 = 2(k + 1) - 4.$$

Для чётного $k + 1$ требуемая оценка уже доказана, а для нечётного $k + 1$ заметим, что числа a и $k + 3 - a$ разной чётности, поэтому, равенство в последнем неравенстве невозможно и $\Delta(k + 1) \leq 2(k + 1) - 5$.

10.8. На доске записали три многочлена с действительными коэффициентами:

$$x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 - 2x + 1, \\ x^4 + a_2x^3 + b_2x^2 - 2x + 1 \quad \text{и} \quad x^4 + a_3x^3 + b_3x^2 - 2x + 1.$$

Оказалось, что $a_1b_2 > a_2b_1$, $a_2b_3 > a_3b_2$ и $a_3b_1 > a_1b_3$.

Докажите, что хотя бы один из записанных на доске многочленов имеет действительный корень.

Решение. Обозначим

$$f_i(x) = x^4 + a_ix^3 + b_ix^2 - 2x + 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Докажем, что среди чисел $f_1(1)$, $f_2(1)$, $f_3(1)$ хотя бы одно неположительное. Предположим противное. Тогда $f_i(1) = a_i + b_i > 0$. Из неравенства $a_ib_{i+1} > a_{i+1}b_i$ следует, что $a_i \cdot (f_{i+1}(1) - a_{i+1}) > a_{i+1} \cdot (f_i(1) - a_i)$, т.е. $a_i \cdot f_{i+1}(1) > a_{i+1} \cdot f_i(1)$. Так как $f_1(1) > 0$, $f_2(1) > 0$, $f_3(1) > 0$, то

$$\frac{a_1}{f_1(1)} > \frac{a_2}{f_2(1)} > \frac{a_3}{f_3(1)} > \frac{a_1}{f_1(1)},$$

чего не может быть.

Не ограничивая общности, пусть $f_1(1) < 0$. Многочлен $f_1(x)$, как и любой другой многочлен чётной степени с положительным старшим коэффициентом, принимает положительные значения при всех достаточно больших по модулю значениях переменной x . Зафиксируем произвольное число $b > 1$ такое, что $f(b) > 0$. Поскольку на концах отрезка $[1; b]$ многочлен $f_1(x)$ принимает значения разного знака (неположительное и положительное), на этом отрезке есть точка, в которой он равен нулю, т.е. этот многочлен имеет действительный корень.

11.5. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$, на правой ветви которой зафиксирована произвольная точка L , отличная от начала координат – точки O . Пары точек A и B выбираются на правой ветви параболы так, что прямая OL является биссектрисой угла AOB , после чего проводится прямая AB .

Докажите, что все получаемые таким образом прямые AB проходят через одну и ту же точку.

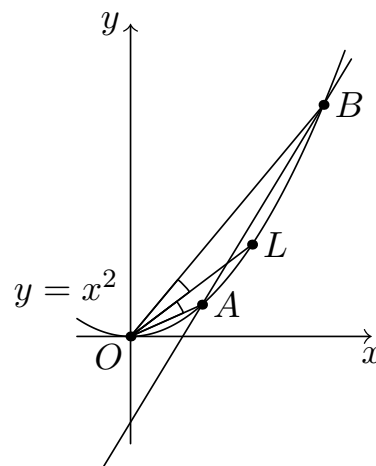
Решение. Пусть точки A, B, L имеют координаты $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $L(c, c^2)$. Найдём уравнение прямой, проходящей через точки A и B :

$$\frac{y - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{x - a}{b - a}, \quad \text{т. е.} \quad y = (a + b)x - ab.$$

Через α , β и γ обозначим углы между осью Ox и прямыми OA , OB и OL , соответственно. Тогда верны равенства $\operatorname{tg} \alpha = a$, $\operatorname{tg} \beta = b$ и $\operatorname{tg} \gamma = c$. Так как OL – биссектриса угла AOB , то $\gamma = (\alpha + \beta)/2$. Если $\gamma \neq 45^\circ$, то определено значение $\operatorname{tg}(2\gamma)$ и

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2c}{1 - c^2} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a + b}{1 - ab}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение прямой AB значение $y = -1$, получаем, что на этой прямой лежит точка с координатами $\left(\frac{-1 + ab}{a + b}, -1\right)$. Из равен-



ства (2) видно, что эти координаты равны $\left(\frac{c^2 - 1}{2c}, -1\right)$ и не зависят от выбора точек A и B . Следовательно, все получаемые в задаче прямые AB проходят через найденную фиксированную точку.

Если же $\gamma = 45^\circ$, то $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = ab = 1$. Поэтому прямая AB проходит через фиксированную точку с координатами $(0, -1)$.

11.6. Дана бумажная полоска 1×2024 . Вася и Петя играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За один ход разрешается закрасить любую ещё не закрашенную клетку полоски в любой из двух цветов – красный или синий. Когда все клетки полоски закрашены, её разрезают на минимально возможное количество полосок так, чтобы все клетки каждой полоски были одного цвета.

Какое максимальное количество таких полосок может гарантировать Вася вне зависимости от действий Пети?

Ответ: 1013.

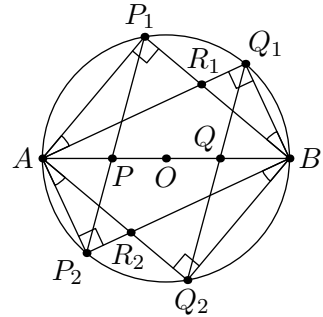
Решение. Приведём стратегию Васи, придерживаясь которой он может гарантировать, что после разрезания получится не менее 1013 полосок. Пусть Вася перед игрой мысленно разобьёт полоску на доминошки (прямоугольники 1×2). На каждом своём ходу Вася будет выбирать доминошку, в которой Петя только что закрасил клетку, и красить непокрашенную клетку этой доминошки в цвет, отличный от использованного Петей. Когда все клетки будут закрашены, найдутся по крайней мере 1012 пар соседних клеток разного цвета (по одной в каждой доминошке), следовательно, будет сделано не меньше 1012 разрезов и образуется хотя бы 1013 полосок.

Покажем, как может действовать Петя, чтобы в результате осталось не больше 1013 полосок. Пусть на первом ходу он закрасит синим цветом самую левую клетку. Далее каждым ходом он будет закрашивать самую левую незакрашенную клетку тем же цветом, что и её сосед слева. Таким образом, на каждом своём ходу, кроме первого, Петя будет создавать хотя бы одну новую пару соседних клеток, окрашенных одним цветом. Изначально есть 2023 пары соседних клеток, а своими ходами Петя делает одноцветными хотя бы 1011 из них. Следовательно, в конце игры останется не больше 1012 пар соседних клеток разного цвета, т. е. будет сделано не больше 1012 разрезов и образуется не больше 1013 полосок.

11.7. На диаметре AB окружности ω выбраны точки P и Q так, что $0 < AP < AQ < AB$. Через точки P и Q проведены две параллельные прямые ℓ_p и ℓ_q соответственно. Прямая ℓ_p пересекает окружность ω в точках P_1 и P_2 , а прямая ℓ_q пересекает окружность ω в точках Q_1 и Q_2 , точки P_1 и Q_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Прямые AQ_1 и P_1B пересекаются в точке R_1 , а прямые AQ_2 и P_2B пересекаются в точке R_2 .

Докажите, что середины отрезков P_1P_2 , Q_1Q_2 и R_1R_2 лежат на одной прямой.

Первое решение. Через M_p , M_q и M_r обозначим середины отрезков P_1P_2 , Q_1Q_2 и R_1R_2 , соответственно. Пусть O – центр окружности ω . Так как прямые OM_p и OM_q – серединные перпендикуляры к параллельным хордам P_1P_2 и Q_1Q_2 , соответственно, то точки M_p , M_q и O лежат на одной прямой. Поместим в точках P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 положительные массы x , x , y и y , соответственно. В точках A и B поместим соответственно массы $y \left(\frac{Q_1R_1}{AR_1} + \frac{Q_2R_2}{AR_2} \right)$ и $x \left(\frac{P_1R_1}{BR_1} + \frac{P_2R_2}{BR_2} \right)$. Выберем x и y такими, чтобы массы точек A и B были равными, т.е.



$$y \left(\frac{Q_1R_1}{AR_1} + \frac{Q_2R_2}{AR_2} \right) = x \left(\frac{P_1R_1}{BR_1} + \frac{P_2R_2}{BR_2} \right). \quad (1)$$

Массы точек A и B соберём в точке O , массы точек P_1 и P_2 – в точке M_p , наконец, массы точек Q_1 и Q_2 – в точке M_q . Следовательно, центр масс рассматриваемой системы материальных точек лежит на прямой M_pM_q .

Сгруппируем исходные массы точек вторым способом. В точку R_1 переместим массу $x \left(1 + \frac{P_1R_1}{BR_1} \right)$ из точек P_1 и B , а также массу $y \left(1 + \frac{Q_1R_1}{AR_1} \right)$ из точек Q_1 и A . Аналогично, в точку R_2 переместим массу $x \left(1 + \frac{P_2R_2}{BR_2} \right)$ из точек P_2 и B , а также массу $y \left(1 + \frac{Q_2R_2}{AR_2} \right)$ из точек Q_2 и A . Докажем, что массы точек R_1 и R_2 равны, т.е. M_r – центр масс рассматриваемой системы материальных точек, а значит, точки M_p , M_q и M_r лежат на одной

прямой. Необходимо показать, что

$$y \left(\frac{Q_1 R_1}{AR_1} - \frac{Q_2 R_2}{AR_2} \right) = x \left(\frac{P_2 R_2}{BR_2} - \frac{P_1 R_1}{BR_1} \right). \quad (2)$$

Равенство (2) будет следовать из (1), если мы покажем, что

$$\frac{Q_2 R_2}{AR_2} : \frac{Q_1 R_1}{AR_1} = \frac{P_1 R_1}{BR_1} : \frac{P_2 R_2}{BR_2}. \quad (3)$$

Так как прямые ℓ_p и ℓ_q параллельны, то дуги $P_1 Q_1$ и $P_2 Q_2$ окружности ω , заключённые между ними, равны. Следовательно,

$$\angle P_1 A Q_1 = \angle P_1 B Q_1 = \angle P_2 A Q_2 = \angle P_2 B Q_2.$$

Так как AB – диаметр окружности ω , то

$$\angle A P_1 B = \angle A Q_1 B = \angle A P_2 B = \angle A Q_2 B = 90^\circ.$$

Следовательно, треугольники $AP_1 R_1$, $AP_2 R_2$, $BQ_1 R_1$ и $BQ_2 R_2$ подобны. Поэтому, $\frac{Q_2 R_2}{Q_1 R_1} = \frac{BR_2}{BR_1}$ и $\frac{AR_1}{AR_2} = \frac{P_1 R_1}{P_2 R_2}$. Перемножив последние два равенства, получаем равенство (3).

Второе решение. Введём комплексную систему координат, в которой ω – единичная окружность, а прямые ℓ_p и ℓ_q параллельны мнимой оси. Обозначим координаты точек P_1 , Q_1 и A через p , q и a соответственно. Тогда координаты точек P_2 , Q_2 и B равны $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $-a$ соответственно. По формуле пересечения хорд единичной окружности, координаты r_1 и r_2 точек R_1 и R_2 удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \overline{r_1} &= \frac{(a + q) - (-a + p)}{aq - (-a)p} = \frac{2a + q - p}{a(q + p)} \quad \text{и} \\ \overline{r_2} &= \frac{(a + \bar{q}) - (-a + \bar{p})}{a\bar{q} - (-a)\bar{p}} = \frac{2a + \bar{q} - \bar{p}}{a(\bar{q} + \bar{p})} = \frac{2apq + p - q}{a(p + q)}. \end{aligned}$$

Точка, сопряжённая середине отрезка $R_1 R_2$ имеет координату

$$\frac{\overline{r_1} + \overline{r_2}}{2} = \frac{1 + pq}{p + q}.$$

Нетрудно видеть, что это число равно своему сопряжённому, т. е. середина отрезка $R_1 R_2$ лежит на вещественной оси вместе с точками $Re(p)$ и $Re(q)$ – серединами отрезков $P_1 P_2$ и $Q_1 Q_2$.

Замечание: Из второго решения видно, что во-первых, утверждение задачи верно и в том случае, когда точка Q лежит между точками A и P , а во-вторых, что середина отрезка R_1R_2 совпадает с точкой пересечения диагоналей равнобедренной трапеции $P_1P_2Q_2Q_1$.

11.8. Найдите все функции f , определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для любых действительных чисел x и y верно равенство

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y) - y) = f(x) + f(y).$$

Ответ: $f(x) \equiv \text{const.}$

Первое решение. Пусть $f(a) = f(b)$ для некоторых действительных a и b . Тогда подставляя в исходное равенство вначале $x = a$, а потом $x = b$ и вычитая из одного равенства другое, получим $f(a+y) = f(b+y)$ для всех действительных y . Значит,

$$f(x) = f(x + (b - a)) \quad (1)$$

для всех действительных x .

Подставляя $x = 0$ в исходное равенство, после вычитания $f(y)$ из обеих частей получим

$$f(f(0) + f(y) - y) = f(0). \quad (2).$$

Подставляя $y = 0$ в исходное равенство, после вычитания $f(x)$ из обеих частей получим

$$f(f(x) + f(0)) = f(0). \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем $f(f(x) + f(0)) = f(f(x) + f(0) - x)$, откуда ввиду (1) выводим, что x — период f для любого действительного x . Значит, $f(x) = \text{const.}$ Несложно убедиться, что она подходит.

Второе решение. Обозначим $f(0) = c$ и подставим в исходное равенство $x = 0$, получим равенство

$$f(c + f(y) - y) = c.$$

Подставив в исходное равенство $x = -y$, получим, что

$$c + f(f(-y) + f(y) - y) = f(-y) + f(y).$$

Так как

$$y = c + f(f(-y) + f(y) - y) - (f(-y) + f(y) - y),$$

то из первого равенства следует, что $f(y) = c$ при всех $y \in \mathbb{R}$.